EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

7e JAARGANG 1930/31, Nr. 3

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119

INHOUD.

De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. G. van der Corput; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den Inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

HET GETAL IN DE GRIEKSCHE WISKUNDE [1]).

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Onder de talrijke gebieden van de geschiedenis der wiskunde, die de aandacht van de historici dezer wetenschap blijken te kunnen trekken en vast te houden, zal er wel nauwelijks een te noemen zijn, waarnaar hun belangstelling steeds zoo onverzwakt zal blijven uitgaan als naar de mathesis, die op den klassieken bodem van Hellas, voltooiend wat Aegypte en Babylon in eeuwenlange werkzaamheid hadden voorbereid, den grondslag heeft gelegd voor dien rijken bloei van de West-Europeesche wiskunde, waarvan wij thans nog getuige zijn. Immers, ook wie zich bij voorkeur verdiept in de voor-Helleensche perioden, zal zelfs daar, waar hij doelstelling en methode der mathematische redeneeringen zijn aanvankelijk laag gestemde verwachtingen steeds sterker ziet overtreffen, niet kunnen nalaten op te merken, dat toch blijkbaar de zuivere wiskunde in hare strenge schoonheid een vrucht is van den tijd, die het Parthenon en de Grieksche tragedie schiep; en wie de moderne mathesis gadeslaat in de duizelingwekkende hoogten van haar meest abstracte scheppingen en in haar steeds dieper borend onderzoek naar de hechtheid van haar grondslagen, zal, waar hij naar inzicht in de wordingsgeschiedenis van deze gedachtenwereld streeft, al even zeker worden teruggevoerd naar de cultuur der Hellenen, als ieder ander, die het denken van onzen tijd in zijn oorsprongen tracht te begrijpen.

Het mag daarom niet anders dan natuurlijk heeten, dat ik dit uur, waarin ik het onderwijs in de geschiedenis der wiskunde, dat het Gemeentebestuur van Amsterdam mij toestaat, aan de Universiteit dezer stad te geven, in het openbaar mag inleiden, wil wijden aan enkele algemeene beschouwingen, waartoe de studie van de Grieksche wiskunde aanleiding geeft; in het bijzonder zou

[1]) Openbare Les, gehouden bij de aanvaarding van het ambt van privaat-docent in de geschiedenis der wiskunde aan de Gemeente-Universiteit van Amsterdam op 11 October 1930.

ik daarbij uwe aandacht willen vragen voor het getalbegrip der Hellenen en voor de rol, die het getal in verschillende gebieden van hunne cultuur heeft gespeeld.

De eerste kennismaking met de werken van de groote figuren uit het bloeitijdperk der Grieksche mathesis, Euclides, Archimedes en Apollonios, pleegt bij den modernen wiskundige gevoelens op te wekken, die uit bewondering en bevreemding op verwarrende wijze gemengd zijn. Het is niet onmogelijk, dat hij bij het begin van zijn lectuur nog bevangen is in de vrij algemeen verspreide opvatting, dat de *Elementen* van Euclides naar inhoud en vorm ongeveer met een negentiende-eeuwsch leerboek der elementaire meetkunde overeenkomen en dat ook de andere Grieksche mathematici door het gemis van het hulpmiddel der Analytische Meetkunde en in den angst voor het oneindige, dien men hun toeschrijft en die hun de ontdekking der Infinitesimaalrekening principieel onmogelijk zou hebben gemaakt, niet veel meer hebben bereikt, dat wat men tegenwoordig gewoon is, op elementair-geometrische basis te bouwen. In dat geval zal hij spoedig onder den indruk komen zoowel van de aanzienlijke mate van strengheid, die de fundeering der Grieksche mathesis kenmerkt, als van het hooge mathematische peil, waarop hare methoden en resultaten ondanks het gemis van zoovele schijnbaar onontbeerlijke moderne hulpmiddelen staan en hij zal zonder moeite de onbegrensde vereering begrijpen, waarmee geniale figuren als Galilei en Christiaan Huygens, wier wiskundig denken zooveel nauwer dan het onze met dat der Grieken verwant was, tegen een man als Archimedes hebben opgezien. En toch, ondanks alle bewondering voor het inderdaad schitterende mathematische vernuft van den Griekschen geest, zal hij er niet licht toe komen, zich in de gedachtenwereld van de bestudeerde schrijvers werkelijk thuis te voelen, te denken langs hun denkwegen, te spreken in hun taalvormen en te schrijven in hun notaties; steeds weer zal hij de verleiding voelen, hun betoog te vervangen door een moderne mathematische verificatie van het verkregen resultaat, waardoor hij zich dan echter den weg tot het historisch inzicht in hun wiskunde voorgoed verspert.

Wanneer men nu tracht, de verschillende oorzaken voor dit gevoel van vreemdheid en ontoegankelijkheid, dat ook bij langdurige verplaatsing in de klassieke gedachtenspheer nooit geheel wil wijken, zooveel mogelijk onder een algemeen gezichtspunt

te brengen, dan lijkt het wel, dat ze voor een groot deel zijn terug te voeren op de eigenaardigheden van het Grieksche getalbegrip, dat in zijn strenge beperktheid scherp contrasteert met de zeer ruime vormen, die het in de moderne mathesis heeft aangenomen en dat daardoor van den hedendaagschen wiskundige een voortdurende verloochening van ingewortelde denkgewoonten eischt.

De Grieksche wiskunde van de z.g. gulden periode verstaat namelijk onder getal, *ἀριθμόσ*, zeer nadrukkelijk alleen datgene, wat wij een natuurlijk getal noemen. Een getal, zegt de 2e Definitie van het 7de Boek van Euclides, is een hoeveelheid, samengesteld uit eenheden. Een getal blijkt dus een eindige verzameling van dingen te zijn, die elk de eigenschap der een-heid bezitten en dit begrip valt, althans naar omvang, met dat van natuurlijk getal samen, behoudens de voor de Grieksche wiskunde niet onbelangrijke omstandigheid, dat één niet als een getal wordt beschouwd. In ieder geval blijkt ondubbelzinnig, dat onze nul, onze positieve rationale en irrationale getallen (om van negatieve en complexe getallen nog maar te zwijgen) niet onder het Grieksche begrip van getal vallen.

We moeten er ons nu wel van bewust worden, welk een diepgaanden invloed deze beperktheid van het getalbegrip, die in geen enkele andere periode der wiskunde is geëvenaard, op de geheele structuur, zoowel van de rekenkunde als van de meetkunde der Grieken heeft moeten uitoefenen. Voor de rekenkunde, die aan twee van haar hoofdbewerkingen slechts een beperkte uitvoerbaarheid kan toekennen, is dit onmiddellijk te overzien: iedereen kan zich gemakkelijk verplaatsen in die phase van zijn wiskundige ontwikkeling, waarin aftrekken en deelen niet steeds mogelijk waren. Voor de meetkunde echter, waarop in onzen tijd van den aanvang af, hoe onverantwoord ook, het begrip van het reëele getal in zijn vollen omvang wordt toegepast en die daardoor onmiddellijk een sterk arithmetisch karakter aanneemt, kost dit meer moeite en hier ontstaat dan ook gewoonlijk het eerst het gevoel van bevreemding over schijnbaar noodeloos omslachtige uitdrukkings- en redeneerwijzen der Grieken en over probleemstellingen, waarvan ons aanvankelijk de oorsprong al evenzeer ontgaat als het doel. Enkele voorbeelden mogen dit toelichten.

De lengte van een lijnstuk kan, na afspraak van een eenheid van

lengte, slechts dan door een getal worden uitgedrukt, wanneer het gegeven lijnstuk een geheel veelvoud van de eenheid is; is dit niet het geval, dan is het mogelijk, dat het zich tot de eenheid verhoudt als een getal tot een ander getal, maar het kan ook voorkomen, dat twee lijnstukken zich in het geheel niet als getallen verhouden en, zoo het al mogelijk is, niettemin van hun verhouding te spreken, dan zal deze toch in ieder geval *ἄρρητος*, onzegbaar, zijn, d.w.z. niet door getallen uit te drukken. Voor oppervlakken en inhouden gelden mutatis mutandis dezelfde opmerkingen. De consequenties van deze opvattingen liggen nu voor de hand. Euclides kan b.v. niet zeggen, dat het oppervlak van een driehoek gelijk is aan het halve product van de lengten van basis en hoogte; immers het is in het algemeen onmogelijk, aan basis en hoogte een lengte toe te kennen. Hij spreekt slechts uit, dat driehoeken met gelijke bases en gelijke hoogten gelijke oppervlakken hebben en dat een driehoek de helft is van een parallelogram, dat er basis en hoogte mee gemeen heeft, terwijl hij als propositie zou kunnen hebben, dat de reden van twee driehoeken samengesteld is uit de reden van hun bases en de reden van hun hoogten. Het theorema van Pythagoras is bij hem *niet* een arithmetische relatie tusschen de lengten van de zijden van een rechthoekigen driehoek, maar een zuiver geometrische aequivalentie-betrekking tusschen het oppervlak van het vierkant, op de hypotenusa als zijde beschreven en de oppervlakken van de vierkanten op de rechthoekszijden. De leer der kegelsneden is noch, wat ze voor de 17e eeuw was, een algebraische behandelingswijze van meetkundig gedefinieerde krommen van den tweeden graad, noch, wat ze voor ons is, een in meetkundige termen gekleede analyse van de geheele rationale functioneele relatie tusschen twee veranderlijke getallen, maar een met behulp van de meetkundige methoden der oppervlakterekening uitgevoerde studie van de aequivalentierelaties tusschen de vierkanten en rechthoeken, die door twee veranderlijke en een aantal constante lijnstukken kunnen worden voortgebracht. En, om deze naar willekeur voort te zetten rij van voorbeelden te besluiten: lijnstukken, welker verhouding tot een als rationaal aangenomen eenheid niet door getallen is uit te drukken, omdat zij met die eenheid in den letterlijken zin van het woord „asymmetrisch”, d.w.z. zonder gemeene maat, zijn, worden niet beschreven door het opgeven van irrationale getallen voor hare lengten, maar ze worden naar den aard hunner asymmetrie qualitatief geclassificeerd.

Ik hoop, dat al deze dingen, die voor het meerendeel zoo volkomen in strijd zijn met onze arithmetische denkgewoonten, voldoende zullen zijn, om uwe belangstelling te wekken voor de vraag naar de motieven, die er de Grieksche mathematici toe hebben kunnen drijven, hun getalbegrip zoo sterk te beperken, dat het nog slechts de natuurlijke getallen omvatte. Want inderdaad zijn er tal van teekenen, die er op wijzen, dat we in deze eigenaardigheid niet een aangeboren eigenschap van den Griekschen geest moeten zien, maar dat ze het gevolg is geweest van een bewuste mathematische daad, waarmee ter wille van de eischen der exactheid een natuurlijke gegroeide, maar logisch onbevredigende ontwikkeling in andere banen werd geleid. Van de overwegingen, die dit aannemelijk maken, wil ik er twee noemen: in de eerste plaats staat het vast, dat in de Aegyptische en Babylonische meetkunden het getal vrijwel dezelfde functie heeft vervuld, als het nog in onzen tijd in de voorwetenschappelijke en practische behandeling van geometrische problemen doet, d.w.z. dat men onbekommerd lengten, oppervlakken en inhouden door rationale getallen heeft uitgedrukt en dat men met die getallen heeft gerekend, dat men dus de stelling van Pythagoras wèl heeft beschouwd als een arithmetische relatie tusschen de lengten van de zijden van een rechthoekigen driehoek en het oppervlak van een driehoek wèl gelijk heeft durven noemen aan het halve product van basis en hoogte. Het is nu zeer waarschijnlijk, hoewel niet door directe bewijsplaatsen te staven, dat het in de oudere phasen der Grieksche meetkunde, die toch in ieder geval onder Oosterschen invloed hebben gestaan, niet anders is geweest en dat de Grieksche mathematici hebben moeten omleeren, om de methoden te verwerven, die we bij Euclides aantreffen. In de tweede plaats kan er op gewezen worden, dat de wiskundigen der gulden periode een strenge onderscheiding maken tusschen de arithmetica, d.i. de getallentheorie, en de logistica, d.i. het practische rekenen. Van de laatste leeren ons hun werken, op een enkele uitzondering bij Archimedes nà, niets: men kan de drie boeken, die Euclides in zijn *Elementen* aan de arithmetica wijdt, doorwerken en nog niet weten, hoe de Grieken hun getallen schreven en hoe ze er mee rekenden. De strenge scheiding nu tusschen arithmetica en logistica maakt ook al niet den indruk, van nature in het Grieksche denken aanwezig te zijn geweest; Aegypte en Babylon kennen haar niet en de oudere phasen der Grieksche wiskunde, die in haar geheele verloop op

rekenkundig gebied in veel hoogere mate dan op meetkundig van deze beide culturen afhankelijk is geweest, waarschijnlijk dus evenmin. Ook hier wordt dus de gedachte aan een bewuste hervorming gewekt.

Het is nu een van de meest fascineerende vragen van de geschiedenis van de Grieksche wiskunde, door wie en op welke motieven deze hervorming is verricht. En het is een vraag, waarop het antwoord met groote kans op zekerheid is te geven. Inderdaad is men, een door P. Tannery in beginsel aangegeven weg volgend, tot de overtuiging gekomen, dat er omstreeks het jaar — 400 een crisis in de fundeering van de Grieksche wiskunde moet zijn ingetreden als gevolg van het veldwinnend inzicht in de ongegrondheid van twee tot dien tijd toe als deugdelijke onderstellingen aanvaarde opvattingen, waarvan de eene bestond in de intuïtieve zekerheid, dat elke verhouding door getallen was uit te drukken, de andere in de overtuiging, dat een continuum kon worden opgebouwd door iuxtapositie van indivisibilia van een geringer aantal dimensies. Twee ontdekkingen moeten nu plotseling de onbekommerdheid, waarmee men op deze opvattingen de meetkunde opbouwde, hebben verstoord: de eene, die de asymmetrie aan het licht bracht van zijde en diagonaal van een vierkant en die daarna al spoedig tot het inzicht voerde, dat lijnstukken zich in het algemeen niet als getallen verhouden, is waarschijnlijk afkomstig uit een mathematischen kring in Groot Griekenland, die zich naar den ouden wijsgeer Pythagoras noemde; met de andere, die in beroemd geworden redeneeringen de heerschende meeningen over continuiteit ad absurdum voerde en die voor goed de overtuiging van de onuitputtelijkheid, het inexhaustibele, van het oneindige vestigde, is de naam van den Eleaat Zenoon verbonden.

Bovendien is het gelukt, een aannemelijke hypothese op te stellen over de wijze, waarop deze crisis zou zijn overwonnen. Het is namelijk zeer waarschijnlijk, dat die overwinning in beginsel te danken is geweest aan het werk van twee mathematici uit den kring van Plato, Eudoxos van Knidos en Theaitetos van Athene. Hierbij wordt dan aan Eudoxos de opstelling van de redentheorie toegeschreven, die in het vijfde Boek van de *Elementen* van Euclides wordt opgebouwd en die zoowel voor symmetrische als voor asymmetrische grootheden geldt, alsmede de schepping van die voortreffelijke methode ter behandeling van oneindige processen, die

men door den naam van exhaustiemethode enkele eeuwen lang aan wanbegrip heeft blootgesteld en waarvan de groote mathematische waarde eerst in onzen tijd weer voldoende wordt beseft. Van Theaitetos neemt men aan, dat hij het verschijnsel der irrationaliteit nauwkeuriger heeft bestudeerd, daarbij den grondslag leggend voor het als croix des mathématiciens lang berucht gebleven tiende Boek der *Elementen* en dat hij daarbij de behoefte heeft gevoeld aan een exacten opbouw van de arithmetica, zooals we dien bij Euclides in de Boeken VII—IX aantreffen. Voor ons is op het oogenblik uit het werk van Eudoxos voornamelijk de redentheorie en uit dat van Theaitetos en zijn opvolgers de fundeering van de arithmetica van belang. De theorie van Eudoxos, waarin, met behulp van geen andere getallen dan de natuurlijke, de relaties van gelijkheid en ongelijkheid van redens, hetzij rationaal, hetzij irrationaal, worden gedefinieerd en die dan verder voor deze redens den algorithmus ontwikkelt, die tot in de 17e eeuw het voornaamste rekenmiddel der meetkunde is gebleven, maakt het mogelijk, de rol, die in onzen tijd het reëele getal in geometrische redeneeringen en berekeningen speelt, door de reden te laten vervullen. Voor het natuurlijke getal zelf blijven zoodoende geen andere functies meer over, dan die het in de definities der redentheorie en in de opsomming van aantallen heeft. De hervorming der arithmetica, door of althans ten gevolge van het werk van Theaitetos, kan verder aansprakelijk worden gemaakt voor de scheiding van de rekenkunde in twee gebieden, waarvan de eerste, dank zij een meer exacte ontwikkeling van de theorie der getalredens, zich in aansluiting aan de leer van Eudoxos tot natuurlijke getallen kon beperken en, daardoor gelouterd, waard kon worden geacht, als arithmetica in engeren zin, in de zuivere wiskunde te worden opgenomen, terwijl de tweede, die zich als van ouds van het in de practijk van het leven ontwikkelde rationale getalbegrip bleef bedienen, als logistica een zelfstandig bestaan buiten de wiskunde ging voeren.

In haar geheel genomen, vormt de overwinning van de grondslagencrisis een van die imponeerende momenten in de geschiedenis van de wiskunde, waarin een eeuwenlang vol vertrouwen toegepaste en door practische resultaten schijnbaar voldoend ondersteunde wijze van redeneeren wordt verlaten, omdat ze de zelfkritiek van het eerlijke denken niet meer kan bevredigen en waarin enkele groote wiskundigen uit de puinhoopen van wat zij vernie-

tigden, een nieuwe, hechtere en schoonere mathematische wereld bouwen.

Ik zou niet graag willen beweren, dat deze schets van de omwenteling, die de Grieksche wiskunde omstreeks het jaar —400 schijnt te hebben ondergaan, en die men voor de eigenaardige structuur van het Grieksche getalbegrip aansprakelijk kan maken, een absoluut betrouwbare historische waarheid bezit. Wij zijn nu eenmaal voor de reconstructie van de prae-Euclidische wiskunde aangewezen op een zeer schaarsch bronnenmateriaal en men moet zich, wil men die reconstructie niettemin beproeven, hier meer dan elders op het historisch instinct verlaten. Toch, al is het mogelijk, dat de ontdekking van nieuwe bronnen ons nog eens zal dwingen, het ontworpen beeld in details te wijzigen, het is niet waarschijnlijk, dat de groote lijnen ervan eenmaal zullen blijken, verkeerd getrokken te zijn. Daarvoor bezit het te veel inwendigen samenhang en geeft het een te goede aansluiting aan gewaarborgde feiten.

Het is nu echter wel gewenscht, nog even de vraag onder oogen te zien, of, met alle erkenning van den invloed van de hervorming van Eudoxos en Theatetetos, niet als primaire oorzaak van de geringe plaats, die het getal in de Grieksche meetkunde inneemt en van het overheerschend geometrisch karakter, dat deze meetkunde dientengevolge kenmerkt, een algemeene eigenschap van het Grieksche denken moet worden beschouwd, die zou kunnen bestaan in een voorkeur voor het ruimtelijk voorstelbare boven het abstract denkbare. Er is inderdaad het een en ander voor dit vermoeden te zeggen. Vooreerst dit, dat de meetkunde van Euclides niet alleen gekarakteriseerd wordt door de in de overwinning van de crisis ontstane scheppingen, de redentheorie, de exhaustiemethode en de qualitatieve classificatie van irrationaliteiten, maar dat een integreerend bestanddeel daarvan ook de oppervlakterekening of geometrische algebra is, die langs zuiver geometrischen weg tot de oplossing van het algemeene probleem van den tweeden graad voert en die vooral in de Boeken II en VI een op den voorgrond tredende positie inneemt. Deze methode toch, die wel in de allereerste plaats het geometrisch karakter van de Grieksche meetkunde veroorzaakt, is zeker van ouderen datum dan het crisistijdperk en een belangrijke trek van de Euclidische meetkunde is dus in ieder geval buiten den invloed van de Platonische mathematici om ontstaan. Vervolgens kan men wijzen op de prominente positie, die geometrische uitdruk-

kingen en beschouwingen in de Grieksche arithmetica innemen. Reeds vanaf de oudste tijden, waarvan we kennis kunnen nemen, worden hierin getallen meetkundig voorgesteld, eerst door rijen van stippen, dan door polygonale stiptableaux, later door lijnstukken en oppervlakken. Men spreekt, in termen, die nog heden voortleven, van vierkante getallen en kuben, daarnaast van langwerpige of rechthoekige en van polygonale. Een samengesteld getal ontstaat uit zijn zijden, die niet voorkomen in grooteren getale dan drie, omdat de arithmitica even driedimensionaal is als de geometrie en men begrijpt hierdoor onmiddellijk, dat de Grieken nooit tot de algemeene theorie van de ontbinding van een samengesteld getal in priemfactoren zijn gekomen. Spreekt uit dit alles, zoo kan men vragen, niet een zoo duidelijke voorliefde voor geometrische aanschouwelijkheid, dat alleen daardoor reeds de onbeteekenende rol van het getal in de meetkunde afdoende kan worden verklaard?

En toch blijkt deze opvatting bij nadere beschouwing onhoudbaar te zijn. Het valt namelijk op, dat bij Euclides de meetkundige terminologie en afbeeldingswijze der getallen reeds in hooge mate het zuiver formeele en conventioneele karakter heeft aangenomen, dat daaraan later geheel eigen zou worden; hij spreekt wel van vlakke en ruimtelijke getallen, maar hij teekent ze uitsluitend als lijnstukken, welker lengten de aantallen hunner eenheden aangeven en hij ziet dus blijkbaar de vermenigvuldiging van twee factoren reeds niet meer in de meetkundige gedaante van voortbrenging van een rechthoek uit zijn zijden, zooals Theaitetos haar bij Plato beschouwt. Het geometrisch karakter der arithmetica wordt dus blijkbaar in de vierde eeuw veeleer teruggedrongen dan verder ontplooid en dit is veel meer in overeenstemming met de theorie, die de structuur der Euclidische meetkunde in de eerste plaats als het resultaat van de overwinning van de grondslagencrisis opvat, dan met de onderstelling, dat het getal in zijn wiskundige functies beperkt zou zijn door een voorkeur voor geometrische aanschouwelijkheid. Want wanneer men getallen door lijnstukken en oppervlakken gaat voorstellen, niet uit traditie, maar bij wijze van meetkundige afbeelding, is het volmaakt onbegrijpelijk, dat men op grond hiervan het getalbegrip vanaf de historisch gegroeide gedaante, waarin het de rationale getallen omvat, gaat beperken tot de natuurlijke getallen inplaats van het uit te breiden tot de irrationale. Een lijnstuk, waarvan de lengte door een irrationaal getal wordt voorge-

steld, onderscheidt zich aanschouwelijk in geen enkel opzicht van een met een rationale lengte en langs dezen weg is men dan ook later tot de opvatting gekomen, dat de numeri surdi als echte getallen konden worden beschouwd: zoo werd de meetkundige continuiteit overgedragen op het getallensysteem en het arithmetisch continuum dankt dus zijn ontstaan aan meetkundige invloeden. De klassieke Grieksche wiskunde kent echter geen scherpere tegenstelling dan tusschen het sprongsgewijze veranderlijke getal en het continu aangroeiend lijnstuk. Men kan zich dus bezwaarlijk op den invloed van de meetkundige aanschouwing beroepen, om dit te verklaren.

Door wat ik tot dusver heb gezegd, is het Grieksche getalbegrip in zijn omvang beschreven en in zijn invloed op de structuur der wiskunde van het klassieke tijdvak in beginsel geschetst. Daarmee is echter het groote belang van de rol, die het getal in het Grieksche denken heeft gespeeld, nog nauwelijks aangeroerd. De wiskunde is in de Grieksche cultuur niet, wat ze in onzen tijd langzamerhand is geworden, een van de andere wetenschappen van natuur en geest scherp afgescheiden, door enkelen beoefend, maar door de groote meerderheid der wetenschappelijk gevormden verwaarloosd vak: ze doordringt er nog de geheele philosophie, die alle ware weten in zich vereenigt en voor welker bestudeering een degelijke mathematische scholing al spoedig een vanzelfsprekende en onmisbare voorwaarde wordt. En het is niet in de laatste plaats door middel van het getal, dat de mathesis haar sterken invloed uitoefent. Men kent de fundamenteele kosmologische beteekenis, die de Pythagoraeische philosophen aan het getal toekennen. De dingen zijn getallen; zoo luidt volgens Aristoteles hun grondbeginsel, dat, ook al blijft zijn juiste zin voor ons onvatbaar, toch in ieder geval getuigt van den sterken indruk, dien het opmerken van arithmetische relaties in de natuurverschijnselen op het ontluikende philosophische denken moet hebben gemaakt. Bij Plato is dezelfde opvatting in beginsel nog even levendig: wanneer hij in den *Timaios* de structuur van de stoffelijke wereld beschrijft, wordt het inlasschen van de elementen lucht en water tusschen het vuur, dat de wereld zichtbaar en de aarde, die haar tastbaar maakt, teruggebracht tot het inschakelen van twee middenevenredigen tusschen twee kubische getallen. En tot een nog veel belangrijker functie wordt het getal geroepen in de vorming van de ziel der wereld: van de elementen, waaruit zij is samengesteld, is het getal, dat overal orde en schoonheid schept, het meest belang-

rijke, het eenige onsterfelijke deel en het is slechts een praegnante samenvatting van een wezenlijken trek van de Pythagoraeische en Platonische wijsbegeerten, wanneer Xenokrates later de ziel definieert als een getal, dat zich beweegt.

Niet minder hecht dan de band tusschen de kosmologische theorieën van den *Timaios* en de gedachtenspheer der Grieksche arithmetica is de samenhang tusschen de mathesis in het algemeen en de Platonische ideeënleer. De geometrische vormen staan tusschen de oneigenlijke wisselende verschijnselen der stoffelijke wereld en de eigenlijke onveranderlijke wereld der ideeën; onstoffelijkheid en onvergankelijkheid hebben ze met deze gemeen en slechts de verscheidenheid, die ze bezitten, stempelt ze tot entiteiten van lagere orde. En voor getallen is de samenhang met de wereld van het ideale nog nauwer: in de oudere phasen van de indeeënleer zijn de getallen ideeën, zoodat men b.v. het vier-in-aantal-zijn mag opvatten als deelhebben aan de idee der vierheid; en in de latere phasen zouden zelfs, zoo men Aristoteles mag gelooven en zoo men mag aannemen, dat men hem goed verstaat, de ideeën getallen zijn geworden, wat echter, ondanks alle scherpzinnigheid, die er reeds aan de oplossing van dit grootste raadsel van de wiskundige philosophie der Grieken is besteed, nog steeds als een onbegrepen uitspraak moet worden beschouwd.

Er is, naast de metaphysica, nog een ander gebied van Grieksche wetenschap, dat sterk met mathematische beschouwingen is doortrokken en waarover ik, om eenige volledigheid in mijn schildering van de rol van het getal in het Grieksche denken te bereiken, althans enkele woorden moet zeggen. Het is de harmonie, de intens beoefende en in fellen strijd tusschen verschillende richtingen zich ontwikkelende Grieksche muziektheorie, die, volgens de opvattingen van de school van Plato, zelfs naast arithmetica, geometrie en astronomie deel van de zuivere mathesis uitmaakt. Ze doet dit althans, wanneer men zich, zooals Plato het in de *Politeia* doet, uitdrukkelijk verweert tegen de inmenging van de empirie in de leer van de consonanties, die zelfs bij de Pythagoraeërs voorkomt. Het doel der harmonie is niet, de werkelijk met het oor waargenomen tonen te onderzoeken, om de getalverhoudingen op te sporen, waarop hun consonanties berusten, zooals het ook niet de ware methode der astronomie kan zijn, uit de met het oog waargenomen hemelverschijnselen den waren loop van de hemellichamen te willen

vinden. Men mag oor en oog niet stellen boven het denkend verstand, dat in apriorisch inzicht de absolute getalverhoudingen ontdekt, die als het eigenlijk zijnde ten grondslag liggen aan de waarneming, zoowel van de consonanties der intervallen als van de beweging van de hemellichamen. De ervaring zal met de resultaten van deze speculaties willicht niet strooken; maar dat is een contradictie, waarvoor een rechtgeaarde rationalist nog nooit is teruggedeinsd. Plato zou er, evenals Descartes later deed, waarschijnlijk op geantwoord hebben, dat zulk een strijdigheid niet voor de waarde der ervaring pleit.

Wanneer wij nu hier bijeen waren niet als mathematici van de 20e eeuw, maar als mathematische philosophen in Plato's Olijvenhof, de Akademeia, dan zou ik thans mijn taak als geeindigd kunnen beschouwen. De rol van het getal in de zuivere mathesis, hoezeer nog vatbaar voor gedetailleerde omschrijving, is in beginsel geschetst en er is een indruk gegeven van de functie, die het in de philosophie vervult. Daarnaast komen getallen weliswaar nog voor in de logistica, waarin ze worden toegepast bij de behandeling van de tallooze problemen, die het dagelijksche leven, handel en verkeer, industrie en beeldende kunst, doen rijzen, maar juist die practische toepasbaarheid op de wereld van het stoffelijke verbant deze τέχνη, deze vaardigheid, die op den naam van wetenschap, ἐπιστήμη, geen aanspraak kan maken, uit den gezichtskring van den waren philosophischen mathematicus, die achter de wisseling van de verschijnselen slechts naar het onvergankelijk zijnde zoekt.

De moderne mathematicus staat echter niet meer zoover af van wat men thans, zeer onplatonisch, de realiteit noemt als zijn groote voorgangers in Hellas; hij ziet met voldoening de onschatbare diensten aan, die zijn wetenschap overal bewijst en uit zuiver theoretisch oogpunt interesseert hem de toepasbaarheid van zijn abstracte scheppingen op de stoffelijke wereld. En op die zelfde gronden stelt hij, voorzoover hij historicus is, ook belang in de meest primitieve vormen, waarin de toepassing van de wiskunde op de werkelijkheid heeft plaats gehad. Daarom wil hij in het bijzonder weten, hoe men vroeger getalsystemen vormde, hoe men getallen schreef en hoe men er mee werkte; voor hem zou dus een behandeling van de rol van het getal in de Grieksche wiskunde niet volledig zijn, indien zij de logistica buiten beschouwing liet.

Ik moet er nu uit den aard van afzien, reeds in dit uur een samen-

hangende uiteenzetting van het Grieksche rekenen te geven; niet alleen om den omvang van het onderwerp zelf, maar ook omdat de logistica der Grieken zoo nauw samenhangt met die der Aegyptenaren en der Babyloniërs, dat men haar nauwelijks afgescheiden van deze kan behandelen en zeker niet op zich zelf kan beoordeelen. Ik beperk me dus tot enkele opmerkingen over die kanten van het onderwerp, die in de laatste jaren vooral de aandacht trekken.

De schrijver van de *Epinomis* verklaart ergens met typisch Griekschen nationalen trots, dat wanneer de Grieken iets van de Barbaren hebben overgenomen, zij dit steeds hebben verbeterd. Het loont de moeite, de vraag te stellen, in hoeverre dit oordeel juist is, waar het de Grieksche praestaties op het gebied der logistica betreft; om die vraag te kunnen beantwoorden, moeten enkele mededeelingen over de getalsystemen der Aegyptenaren en der Babyloniers voorafgaan.

In Aegypte treffen we, in den vroegsten tijd, waaruit we berichten over mathematische onderwerpen bezitten, dat is dus in den tijd van het Middelste Rijk, ongeveer —2000, een additief geschreven decimaal getallenstelsel aan, waarin de eenheid en de geheele positieve machten van de basis telkens door afzonderlijke symbolen worden voorgesteld, terwijl de tusschenliggende getallen met behulp van additieve iuxtapositie van deze symbolen worden neergeschreven. Breuken komen alleen voor in den vorm van stambreuken, die op hun beurt additief worden verbonden, om uit te drukken, wat wij algemeene breuken noemen. Voor die algemeene breuken bezit het Aegyptische schrift geen symbool, met uitzondering van de breuk $^2/_3$.

Bij de Babyloniers, of nauwkeuriger bij de Sumeriers, vinden we naast een op soortgelijke wijze opgebouwd zuiver decimaal getallenstelsel een heel ander systeem, dat men gewoonlijk het sexagesimale systeem noemt, en waarvan de invloed nog heden voortleeft in de indeeling van den cirkelomtrek en van het uur. De uitdrukking sexagesimaalsysteem geeft echter lang niet voldoende de eigenschappen van dit merkwaardige en vernuftige stelsel aan. Zij doet niet uitkomen, dat de coefficienten van de opvolgende machten van 60, die in de ontwikkeling van de sexagesimaal opgebouwde getallen voorkomen, op hun beurt weer decimaal zijn gebouwd. En zij drukt niet uit, dat de opvolgende machten van de basis 60 niet, zooals in de oorspronkelijke decimale systemen met de machten van de basis 10 gebeurt, door telkens nieuwe symbolen worden aangegeven, maar door hetzelfde teeken,

dat ook voor de eenheid dient. Vooral de laatste eigenschap verdient onze volle aandacht; immers zij is een der twee kenmerken van een positioneele schrijfwijze, zooals het Indische getallenstelsel die kent. Het andere kenmerk van zulk een positiesysteem, het gebruik van de nul om het niet voorkomen van eenheden van een bepaalden trap aan te geven, ontbreekt bij de Sumeriers; slechts in zeer late teksten komt een diakritisch schriftteeken in het inwendige van getalsymbolen voor, om leege plaatsen aan te duiden, maar het blijft altijd ontbreken aan het eind van een getal. Daardoor is het Sumerische systeem nooit meer geworden dan een relatief positiesysteem; men kan wel zien, welke waarde een zeker getalteeken heeft in verhouding tot die van hetzelfde teeken op een andere plaats, maar men weet zonder nadere aanduiding niet, welke de absolute waarde van dat teeken is. En het is alleen een positiesysteem, wat de opvolgende machten van 60 betreft; de coefficienten daarvan worden, evengoed als in Aegypte, additief geschreven door iuxtapositie van de symbolen van 1 en 10.

Het groote voordeel van een positiesysteem bestaat niet alleen in de korte en overzichtelijke schrijfwijze van geheele getallen, die het mogelijk maakt; van niet minder belang is, dat het den weg opent tot een schrijfwijze op denzelfden voet als die der geheele getallen van alle breuken, wier noemer geen andere priemfactoren bevat dan die ook in de basis van het systeem voorkomen en dus tot de mogelijkheid, deze breuken te onderwerpen aan de rekenregels, die voor geheele getallen gelden. Deze mogelijkheid, die voor het decimale positie-systeem in West-Europa eerst na vele eeuwen zou worden verwezenlijkt, hebben de Sumeriers in hun stelsel, dat boven het decimale het voordeel heeft van een priemfactor 3 in de basis naast de factoren 2 en 5 en dat dus voor veel meer breuken dan het decimale een eindige positioneele schrijfwijze toelaat, in beginsel weten te benutten, hoewel ze er niet zooveel partij van hebben weten te trekken, als denkbaar zou zijn geweest.

Het is nu zeer aannemelijk, dat de Grieken met hun menigvuldige relaties tot de twee in hun bloeitijdperk reeds vervallen culturen van Aegypte en Babylon reeds vroeg de gelegenheid moeten hebben gehad, met de beschreven getalsystemen in aanraking te komen. In hoeverre hebben ze van die aanraking voor hun logistica weten te profiteeren? Men moet erkennen, dat dit slechts weinig is en dat de uitspraak van de *Epinomis* voor dit bijzondere gebied reine groot-

spraak moet worden genoemd. Eeuwenlang hebben de Grieken in hun acrophonisch getalsysteem, waarin 5 en de opvolgende machten van 10 werden voorgesteld door de beginletters van de woorden voor deze getallen en waarin dan verder de additieve schrijfwijze werd toegepast, geen stap vooruitgedaan ten opzichte van de Aegyptenaren. In hun breukrekening zijn ze steeds een opvallende voorliefde voor de Aegyptische stambreuken blijven vertoonen, al hadden ze dan ook wel symbolen voor algemeene breuken. En het heeft geduurd tot —150, voordat Hipparchos de astronomie heeft verrijkt met de hulpmiddelen van de Babylonische sexagesimaalrekening; weliswaar hebben de Grieksche mathematici de techniek van deze methode verbeterd, maar ze hebben niet gezien, met hoe geringe wijziging uit het Babylonische systeem een absoluut positiesysteem had kunnen worden verkregen. De roem van deze voor de ontwikkeling der wiskunde onoverzienbaar belangrijke ontdekking hebben ze moeten overlaten aan de Indiers, die haar, onder nog onbekende invloeden, in het decimale stelsel althans voor geheele getallen hebben gedaan. Eerst in het begin van de 13e eeuw zou ze door bemiddeling van Fibonacci voor goed in Europa doordringen.

Naast het acrophonische getalsysteem en de Aegyptische en Babylonische stelsels voor breukrekening staat bij de Grieken echter nog een andere, geheel origineele en vernuftige methode, om geheele getallen te schrijven. Ze zijn namelijk op het denkbeeld gekomen, voor de getallen van 1 tot 10, voor de tientallen en voor de honderdtallen de opvolgende letters van het alphabet te gebruiken, dat ze voor dit doel moesten aanvullen met drie Phoenicische letters. Men kan in dit stelsel elk getal kleiner dan 1000 schrijven met hoogstens drie teekens, waartegenover echter het nadeel staat, dat men de beteekenis van 27 symbolen van buiten moet kennen en dat de schriftelijke uitvoering van de bewerkingen met getallen beneden 10 geenerlei analogie vertoont met die van dezelfde bewerkingen op de overeenkomstige tientallen en honderdtallen. Afgezien van deze voor- en nadeelen, over welker belang de meeningen van de historici der wiskunde op verwonderlijke wijze uiteenloopen, lijkt het echter wel, dat de invoering van het alphabetische systeem op de ontwikkeling van de wiskunde een sterk remmenden invloed heeft uitgeoefend. Zij heeft namelijk de Grieken definitief den weg versperd naar dien meest voor de hand liggenden vorm van symbo-

lische algebra, waarin men onbepaalde grootheden door letters uitdrukt. Als men de letters al noodig heeft, om alle bepaalde getallen te schrijven, kan men ze niet nog eens opnieuw benutten om onbepaalde of onbekende getallen voor te stellen. Zoo is dan ook inderdaad de symbolische algebra altijd buiten den gezichtskring van de Grieksche mathematici gebleven; wanneer men ten slotte bij Diophantos algebraische beschouwingen aantreft, komen deze niet uit boven den embryonalen vorm, dien men de rhetorische algebra noemt.

U zult uit deze korte opmerkingen over de Grieksche logistica reeds den indruk hebben kunnen krijgen, dat zij niet het gebied is, waarop de Helleensche cultuur haar grootste triomphen heeft kunnen vieren. En die indruk wordt bij nadere beschouwing bevestigd. Niet, dat ook op dit gebied niet menigmaal het groote mathematische vernuft van de Grieken zou zijn gebleken; vol verbazing zien we op tegen de bij Archimedes voorkomende rationale benaderingen van $\sqrt{3}$, die naderende breuken van de kettingbreukontwikkeling van dit irrationale getal blijken te zijn, d.w.z. de beste benaderingen, die, zonder gebruik van grootere noemers, mogelijk zijn; groote bewondering ook verdient het met de logistica nauw verwante, maar tot veel grootere hoogten dan deze stijgende werk van Diophantos. Maar toch voelt men steeds, dat de wezenlijke karaktertrekken van de Grieksche mathesis niet hier te vinden zijn. Wat de Grieksche wiskunde stempelt tot een schepping van geheel eigen schoonheid, die zich niet gemakkelijk openbaart, maar die een rijke bron van genot kan zijn voor wie den weg tot haar vindt, is de stijl van de *Elementen* van Euclides, van de *Conica* van Apollonios, van tal van werken van Archimedes. Het is de stijl van de in Plato's school geboren zuivere mathesis, die de meest onstoffelijke uiting is van het Apollinische streven der Hellenen om de gestalten der stoffelijke wereld te veredelen tot ideale vormen.

DE AFFINITEIT BIJ HET ONDERWIJS IN DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE AAN DE H. B. S. MET VIJFJARIGE CURSUS

DOOR

P. WIJDENES.

De leerstof wordt gedrukt door de last van de overlevering van tientallen eeuwen; wat slechts een of twee eeuwen oud is, wordt als „nieuwigheid" ongelezen in de ban gedaan.

§ 1. Ik liet dit drukken op de omslag van de „Oplossingen van de vraagstukken uit de Meetkunde voor M. U. L. O.", waarvan de eerste druk in December 1914 verscheen en had daarbij vooral het oog op de behandeling van de gelijkvormigheid; door deze te laten steunen op de homothetie ontwikkelt men een helder begrip, ontkomt men aan honderd bepalingen voor even zooveel figuren; de „nieuwe" definitie geeft één definitie voor alle; in het kort: F heet gelijkvormig met F′, als F′ congruent is met kF; met symbolen: F $\sim$ F′, als F′ $\cong$ kF is; bij de verouderde manier definieert men de gelijkvormigheid van driehoeken, hoogstens van veelhoeken, maar daarmee is het dan ook afgeloopen. Welnu, die theorie van homothetische ligging is nu al meer dan een eeuw oud; toch zijn er nog heel wat scholen, waar men om zoo te zeggen, lak heeft aan die nieuwigheid.



Met de affiniteit is het vrijwel hetzelfde, alleen slaan daarop niet die tientallen eeuwen, maar toch wel meer dan een eeuw. De grondlegger der Beschrijvende Meetkunde Gaspard Monge (1746—1818) is echter al een goede honderd jaar geleden overleden; de grondlegger, dat

beteekent hier, dat hij rangschikte, verwerkte tot een geheel, al die bijzondere empirische methoden uit de practijk, die in de architectuur, de kunstambachten, de versterkingskunst enz. in gebruik waren. En nu is het zoo jammer, dat Euclides de homothetie niet ontdekt heeft en Monge niet de affiniteit . . . . want daaraan is het te wijten, dat al het later ontdekte „nieuwigheid" werd en slechts met groote moeite zich een weg baant. — Wie dan wel de affiniteit ontdekt heeft en hoe oud die al is, wat men er mee bereikt enz. . . . . daarvoor geef ik het woord aan onzen onderhoudenden historicus Prof. Hk. de Vries. Ik neem een paar bladzijden over uit De Vries—Wijdenes, Leerboek der Beschrijvende Meetkunde II; ook een gedeelte, dat er aan voorafgaat en het stuk, dat de affiniteit verklaart en definieert; voor de duidelijkheid doe ik er een paar figuren bij.

„Is een vlak gegeven, waarvan AA_1 de horizontale doorgang is, en daarin de een of andere figuur F, dan vindt men de horizontale projectie van F door uit alle punten P dezer figuur de loodlijnen PP_1 op het horizontale projectievlak neer te laten; de voetpunten P_1 dezer loodlijnen vormen dan de horizontale projectie F_1 van F. Ieder punt P van F bezit één projectie P_1, maar omgekeerd bezit ook ieder punt P_1 van F_1 één origineel P in F; twee zulke punten, die als origineel en beeld (of projectie) bij elkaar hooren, zullen wij aan elkaar toegevoegde punten noemen, en wij zullen verder zeggen, dat door de bewerking van het projecteeren tusschen de beide figuren F en F_1 een verwantschap wordt tot stand gebracht, en wel een één-éénduidige verwantschap, omdat aan ieder punt der eene figuur één punt der andere wordt toegevoegd, en omgekeerd.

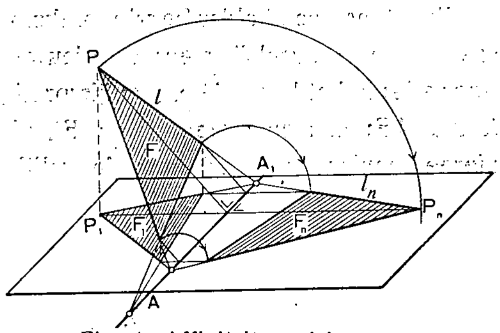


Fig. 1. Affiniteitsas AA_1.

Bestaan er ook punten, die met hun toegevoegde samenvallen? Antwoord: de horizontale doorgang A_1A van het vlak is de meetkundige plaats (afgekort mk.pl.) van alle punten, die met hun toegevoegde samenvallen.

Eén-éénduidige verwantschappen ontmoet men in de Meetkunde allerwegen. Zijn twee figuren congruent, dan staan zij in een één-

éénduidige verwantschap tot elkaar: toegevoegde punten zijn dezulke, die samenvallen, nadat de figuren tot dekking zijn gebracht. Zijn de figuren gelijkvormig, al of niet gelijkstandig of homothetisch, dan staan zij eveneens tot elkaar in een één-éénduidige verwantschap; twee willekeurige cirkels worden zoowel door de stralen door het uitwendige, als door die door het inwendige gelijkvormigheidspunt in één-éénduidige verwantschap gebracht. De Projectieve Meetkunde is niets anders dan de studie van een zekere verwantschap, en zoo kan men zeggen, dat een overgroot deel der Meetkunde verwantschapsmeetkunde is. Ook de Beschrijvende Meetkunde behoort hiertoe, want de Beschrijvende Meetkunde is *in hoofdzaak niets anders dan de studie van de verwantschap tusschen een vlakke figuur, hetzij in de ruimte, hetzij in neergeslagen toestand, en hare projecties, en van de verwantschap tusschen de projecties onderling.*

Liggen punten P van F op een rechte lijn *l*, dan liggen de toegevoegde punten P_1 op een rechte l_1; immers de projectie van een rechte lijn is een rechte lijn; en *l* en l_1 snijden elkaar bovendien op de doorgang A_1A.

De eigenschap, dat aan de punten van een rechte lijn weer de punten van een rechte lijn zijn toegevoegd, is volstrekt niet vanzelfsprekend, want bij de Inversie bijv. gaat een rechte lijn over in een cirkel door het centrum van inversie O; vandaar, dat men verwantschappen, die deze eigenschap wél bezitten, door een afzonderlijke naam onderscheidt; men noemt ze nl. Collineaire verwantschappen of Collineaties. De verwantschap der Beschrijvende Meetkunde is dus een Collineatie.

Voegen wij nog de opmerking toe, dat alle verbindingslijnen PP_1, QQ_1, . . . vertikaal, en dus onderling evenwijdig, zijn, en de doorgang A_1A loodrecht kruisen of snijden, dan zijn wij nu in staat de verwantschap tusschen de figuren F en F_1 volledig te beschrijven. Allereerst echter de opmerking, dat men haar aanduidt met de naam *Affiniteit,* die feitelijk natuurlijk hoegenaamd niets zegt, aangezien het woord affiniteit juist verwantschap beteekent, en dus op de Inversie bijv. even goed past als op de verwantschap tusschen F en F_1; hij is historisch te verklaren en eenigszins te excuseeren door de opmerking, dat de Affiniteit de eerste verwantschap geweest is, die, na de congruentie en de gelijkvormigheid, met volle bewustzijn als verwantschap bestudeerd is, en wel door niemand minder

dan door den grooten Leonhard Euler (Bazel 1707—St. Petersburg 1783), die in zijn Introductio in Analysin infinitorum, Tom. II, Cap. XVIII handelt De Similitudine et Affinitate Linearum Curvarum, dus over de gelijkvormigheid en de affiniteit van kromme lijnen, in welke titel het woord „Affiniteit" ter aanduiding eener bepaalde verwantschap tusschen twee meetkundige figuren voor de eerste maal gebezigd wordt. Euler's Affiniteit was wel is waar algemeener dan diegene, die de Beschrijvende Meetkunde beheerscht, maar deze laatste is dan toch óók een Affiniteit, en dat is het eenige dat ons hier belang inboezemt.

Euler schijnt de studie zijner Affiniteit niet verder vervolgd te hebben; het belang van de studie der meetkundige verwantschappen in het algemeen is pas in het licht gesteld door August Ferdinand Möbius (Schulpforta 1790—Leipzig 1868) in het „Von den Verwandtschaften der Figuren" betitelde tweede deel van zijn onvolprezen werk „Der Barycentrische Calcul" uit het jaar 1827; en het belang van de Affiniteit voor de Beschrijvende Meetkunde is overtuigend aangetoond door Wilhelm Fiedler (Chemnitz 1832—Zürich 1912) in zijn groote werk over „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage".

De Affiniteit tusschen een vlakke figuur F en hare horizontale projectie F_1 is gekarakteriseerd door de volgende eigenschappen:

a. Aan ieder punt der eene figuur is één punt der andere toegevoegd, en de verbindingslijnen van overeenkomstige punten zijn onderling evenwijdig; wij zullen ze affiniteitsstralen noemen.

b. Aan iedere rechte lijn der ééne figuur is één rechte lijn der andere toegevoegd, en het snijpunt van twee toegevoegde rechten ligt op een vaste as A_1A; wij zullen deze de affiniteitsas noemen.

Deze twee eigenschappen karakteriseeren de Affiniteit der Beschrijvende Meetkunde; die tusschen F en F_1 echter bezit nog een derde eigenschap, die haar de naam Orthogonale Affiniteit bezorgd heeft: de Affiniteitsstralen nl. kruisen of snijden de affiniteitsas loodrecht. Deze eigenschap is onwezenlijk, en wij zullen dan ook weldra een affiniteit tusschen twee figuren der Beschrijvende Meetkunde leeren kennen, die haar mist, en waarbij dus de affiniteitsstralen met de affiniteitsas een willekeurige hoek vormen.

Het zal overbodig zijn op te merken, dat alles, wat wij in het voorafgaande gezegd hebben van de verwantschap tusschen F en F_1, op volmaakt dezelfde wijze geldt van die tusschen F en

iedere andere loodrechte projectie op een plat vlak, dus in het bijzonder van die tusschen F en F_2, en F en F_3.

Denken wij nu eens het vlak A om zijn horizontale doorgang A_1A neergeslagen in het horizontale projectievlak (zie fig. 1). Ieder punt van het vlak, dus ook van F, beschrijft dan een cirkel, gelegen in een vlak loodrecht op A_1A, en welks middelpunt op A_1A ligt, zoodat, als P een punt van F, P_n het neer- of omgeslagen punt is, P_nP_1 loodrecht zal zijn op A_1A. Iedere rechte van F wentelt om haar doorgangspunt met A_1A; is dus l een rechte van F, l_n diezelfde rechte in neergeslagen toestand, dan zullen l_n en l_1 elkaar ontmoeten op A_1A. Hieruit volgt blijkbaar, dat er ook tusschen de figuren F_n en F_1 orhogonale affiniteit bestaat; de affiniteitsas is de doorgang A_1A van het vlak. En natuurlijk geldt hetzelfde, indien F wordt neergeslagen in het vertikale vlak; alleen wordt dan de vertikale doorgang AA_2 de affiniteitsas.

Nu is het toch zeker wel zonder meer duidelijk, dat de affiniteit tusschen F_n en F_1 er niet uitsluitend is voor het mooi, maar ook wel degelijk om gebruikt te worden, en dat gebruik moet geenszins hiermede afloopen, dat men bij een langs andere weg geconstrueerde figuur achteraf controleert of aan de affiniteitsregels wordt voldaan, maar integendeel daarin bestaan, dat men de affiniteitsregels zelve bezigt ter constructie; immers de affiniteit is de verwantschap tusschen de bekende figuur F_1 en de onbekende F_n; wat is er dan natuurlijker dan dat men F_n uit F_1 afleidt juist met behulp van die verwantschap zelve? Daar komt nog iets anders bij. Het is er in de Beschrijvende Meetkunde niet om te doen om een of ander doel te bereiken met een overmaat, maar juist met een minimum van constructielijnen, waarmede tevens de nauwkeurigheid gebaat is, en nu staat het volkomen vast dat de constructies, waartoe het consequente gebruik der Affiniteit leidt, de kortste en de nauwkeurigste zijn.

Laat in Fig. 2 gegeven zijn een vlak V_1VV_2, alsmede de horizontale projectie $A_1B_1C_1D_1E_1$ van een in dat vlak gelegen vijfhoek; gevraagd de ware gedaante van deze. Wij zullen die ware gedaante bepalen door het vlak met de daarin gelegen vijfhoek om zijn horizontale doorgang V_1V neer te slaan in het horizontale projectievlak. Nu weten wij, dat de neergeslagen vijfhoek en zijn projectie tot elkaar staan in de verwantschap der orthogonale affiniteit; V_1V is de affiniteitsas, en de affiniteitsstralen snijden deze

loodrecht. Wil men nu echter van deze verwantschap gebruik maken ter constructie, dan heeft men eens voor al te onthouden, dat men één punt der figuur moet neerslaan zónder van die verwantschap gebruik te maken, en hiertoe hebben wij in onze figuur het punt A gekozen. Wij hebben door A een lijn getrokken evenwijdig aan de horizontale doorgang van het vlak, een zoogenaamde eerste hoofdlijn (eerste projectie door A_1 // V_1V, tweede evenwijdig aan de as van projectie), ten einde met behulp van deze A_2 te vinden en daarna hebben wij ons duidelijk gemaakt, dat het punt A bij zijn wenteling om V_1V een cirkel beschrijft, gelegen in een vlak loodrecht op V_1V (horizontale doorgang de loodlijn A_1H op VV_1), welks middelpunt het punt H, en welks straal de hypotenusa van de rechthoekige driehoek is, wiens rechthoekszijden de loodlijn A_1H en de loodrechte afstand van A_2 tot de as van projectie zijn; deze driehoek vindt men in de figuur om zijn horizontale doorgang A_1H neergeslagen in het horizontale vlak ($\triangle A_1HA'$). De lijn HA' is nu de straal van de cirkel, die het punt A beschrijft bij zijn wenteling om V_1V; cirkelt men dus het punt A' om H als middelpunt om op de loodlijn A_1H, dan vindt men A_n, óf het spiegelbeeld van A_n t.o.v. V_1V, al naar gelang het bovengedeelte van het vlak naar links of naar rechts neerslaat.

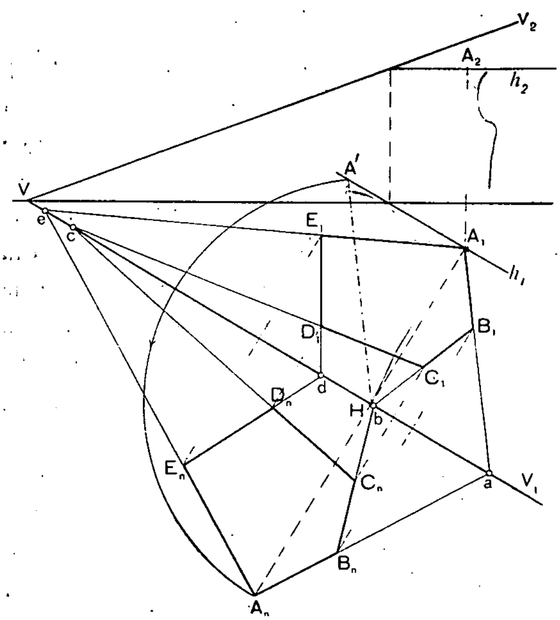


Fig. 2. Uit de 1e projectie wordt de neergeslagen figuur bepaald.

Nu begint de affiniteit haar rol te spelen. Wij snijden de lijnen A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, E_1D_1 en A_1E_1 met V_1V; zie de punten a, b, c, d en e; zorg nu eerst voor de affiniteitsstralen, dat zijn de lijnen uit de punten met aanwijzer 1 loodrecht op VV_1 getrokken, verbind vervolgens A_n met a en met e, dan vindt men B_n en E_n; trek verder

$B_n b$, $E_n d$; als proef moet nu $C_n D_n$ door c gaan. Natuurlijk kan men evengoed in de horizontale projectie de diagonalen A_1D_1 en A_1C_1 trekken.

Ook tusschen de projecties eener vlakke figuur onderling bestaat affiniteit, doch deze is niet meer orthogonaal, maar scheef, d.w.z. overeenkomstige lijnen snijden elkaar nog wel op de affiniteitsas, maar deze staat niet meer loodrecht op de affiniteitsstralen. Ten einde de affiniteit tusschen de eerste en tweede projectie van een vlakke figuur te ontdekken, moeten wij het vlak M beschouwen, dat de 2e en 4e ruimtehoeken middendoor deelt; daarvoor geldt:

Ligt een punt in M, dan vallen zijn beide projecties samen.

Ligt een lijn in M, dan vallen haar beide projecties samen.

Staat een lijn loodrecht op M, dan vallen haar beide doorgangspunten samen.

Staat een vlak loodrecht op M, dan vallen zijn beide doorgangen samen.

Loopt een lijn evenwijdig aan M, dan zijn haar beide projecties evenwijdig.

Het zijn nu in het bijzonder de eigenschappen van dit vlak M, die wij voor ons doel noodig hebben. Is een lijn l gegeven door haar beide projecties, dan vindt men haar snijpunt met M in de beide samenvallende projecties S_{12} dat is het snijpunt van l_1 en l_2.

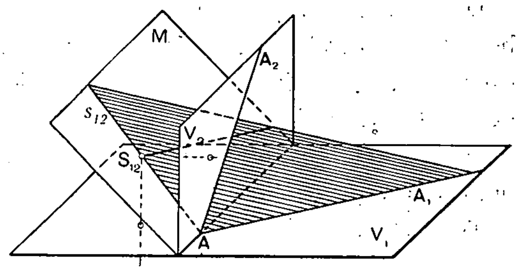


Fig. 3. s_{12} is de affiniteitsas van het vlak A.

Laat in Fig. 4 een vlak A_1AA_2 bepaald zijn door zijn beide doorgangen; hoe vindt men de snijlijn met M? De gewone constructie voor de doorsnijding van twee vlakken gaat hier natuurlijk niet door, omdat van het vlak M de doorgangen samen vallen in de as, waar echter tegenover staat, dat men reeds dadelijk één punt van de gezochte lijn kent, nl. A. Ten einde een tweede te vinden, trekke men in het gegeven vlak een of andere lijn, en snijde deze met het deelvlak. Bij voorkeur bezigt men hiertoe een hoofdlijn, maar mocht deze om welke reden ook minder geschikt zijn, dan doet

iedere andere rechte dezelfde dienst. In Fig. 4 is een eerste hoofdlijn h gebezigd; door h_1 en h_2 met elkaar te snijden, vindt men de samenvallende projecties van het snijpunt S met het vlak M; s_{12} geeft de samenvallende projecties van de snijlijn met M. Immers niet alleen de projecties van h, maar de beide projecties van alle lijnen uit het vlak moeten elkaar op s_{12} snijden, omdat iedere lijn van het vlak met M een punt gemeen heeft, en dit punt natuurlijk op de snijlijn van het vlak met M ligt.

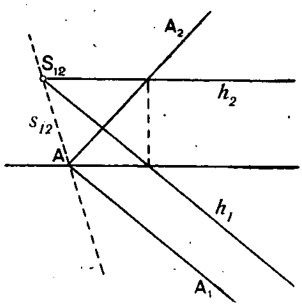


Fig. 4. Constructie van S_{12} en s_{12}.

Hieruit volgt, dat tusschen de eerste en tweede projectie van iedere figuur F van het vlak de volgende betrekkingen van afhankelijkheid bestaan:

a. Aan ieder punt der eene figuur is één punt der andere toegevoegd, en de verbindingslijnen van overeenkomstige punten staan loodrecht op de as van projectie.

b. Aan iedere rechte der éene figuur is één rechte der andere toegevoegd en het snijpunt van twee toegevoegde rechten ligt op de vaste as s_{12}.

Dit zijn echter juist de beide betrekkingen, die de Affiniteit bepalen; de eerste en tweede projectie eener vlakke figuur zijn dus eveneens affiene figuren, en wel voor de lijn s_{12} als affiniteitsas; deze affiniteit is in het algemeen scheef.

De affiniteit tusschen de beide projecties eener vlakke figuur is ontdekt door Wilhelm Fiedler."

Tot zoover Prof. De Vries.

In het voorgaande zijn de beide affiniteitsassen zoo duidelijk verklaard, dat daaraan niets behoeft te worden toegevoegd en tevens ziet men, dat de theorie niet van vandaag of gister is.

§ 2. In de stereometrie wordt de doorsnijding van een veelvlak, in het bijzonder van prisma en pyramide, met een plat vlak behandeld; laten we ons bepalen tot het prisma. We lossen het vraagstuk op: *Van een vierzijdig prisma is het grondvlak PQRS gegeven; dit prisma wordt gesneden met een plat vlak A, bepaald door een punt C van de opstaande ribbe door P en de snijlijn AA_1 met het vlak, waarin PQRS ligt.*

De oplossing loopt eenvoudig: PQ snijdt A_1A in p; C en p zijn beide punten van het vlak A, dus is Cp de doorsnede van het vlak A en het vlak PQC van het prisma; zoo vinden we D; verder in het kort: RQ snijdt AA_1 in q; trek qD tot haar snijpunt E met de ribbe door R; trek rE; op de ribbe door S vindt men F; trek FC, die AA_1 moet snijden in s, waarmee tevens de proef gemaakt is. — Men kan natuurlijk ook RP en SQ tot AA_1 doortrekken, als dat gewenscht is; men zal dit b.v. doen, als een der punten p,q,r,s buiten het vlak van teekening valt. Er is niemand onder de lezers, die dit vraagstuk anders zou oplossen.

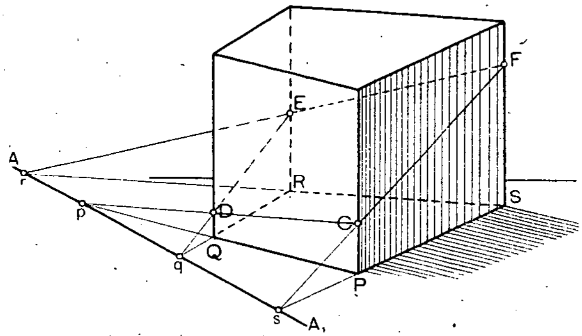


Fig. 5. De stereometrie maakt gebruik van AA_1.

Slaat men echter een oog in eenige boeken over Beschrijvende Meetkunde, die op de Hoogere Burgerschool met vijfjarige cursus gebruikt worden, dan ontwaart men tot zijn niet geringe verbazing en ontsteltenis, dat in dit deel der Meetkunde, dat nog wel een stuk practische toepassing der Stereometrie behoort te zijn, niets en dan ook niets gebruikt wordt van hetgeen in de Stereometrie wordt geleerd; die as AA_1 wordt totaal genegeerd; er wordt veel gedraaid, er worden heel wat hulplijnen en concentrische cirkelbogen getrokken, maar van *de* eigenschap bij uitnemendheid, nl. dat de snijlijnen van elk der zijvlakken met het horizontale vlak en het vlak A elkaar op hun snijlijn snijden, daar bemerkt men niets van. Het onderwijs in de Stereometrie zou wel op een zeer lage trap staan, als leerlingen daarop niet werd gewezen, wat zeg ik, als ze het niet zelf vonden en voortdurend toepasten.

Het overeenkomstige vraagstuk in de Beschrijvende Meetkunde luidt:

Van een vierhoek PQRS, die in een gegeven vlak A ligt, is de horizontale projectie gegeven; gevraagd de verticale projectie van PQRS.

Dit is hetzelfde sommetje; de horizontale projectie is het grondvlak van een prisma; het vlak A is gegeven door zijn doorgangen, dus iets anders dan in de stereometrie; dat is maar een kleinigheid.

Zonder eenig commentaar neem ik hierover een figuur op, die ik

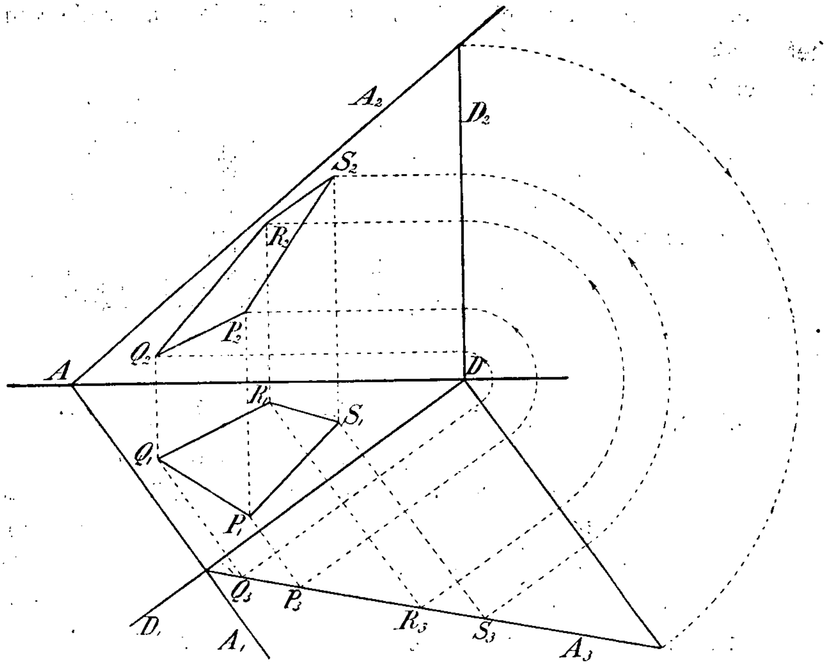


Fig. 6. Zooals het niet moet.

aantref in een schoolboek, dat veel gebruikt wordt en dus op veel scholen zal leiden tot constructies op dezelfde manier; ik kan niet aannemen, dat het meerendeel der leeraren zich heelemaal niet aan het boek stoort en andere laat teekenen.

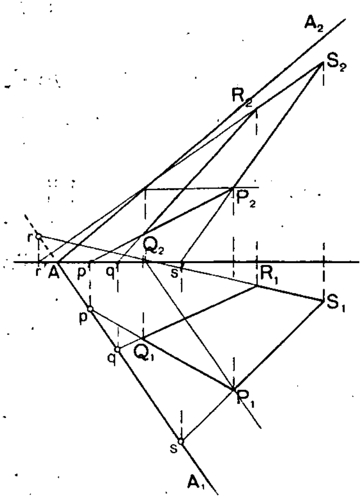


Fig. 7. Met de affiniteitsas AA_1.

De volgende oplossing, waarbij enkel gebruik wordt gemaakt van de doorgang AA_1 evenals in de Stereometrie, is wel zoo duidelijk en zeer zeker verre te verkiezen boven die van fig. 6.

Gegeven zijn het vlak A en $P_1Q_1R_1S_1$. Bepaal P_2 met de eerste hoofdlijn door P; trek de zijden van de horizontale projectie door tot zij AA_1 opv. snijden in p, q, r en s; deze projecteeren zich op de as als p′, q′, r′, s′. Nu geeft $p'P_2$ de rechte, waarop Q_2 ligt, $q'Q_2$ geeft R_2 in de ophaallijn van R_1, op $s'P_2$ ligt S_2; de proef

bestaat nu daarin, dat S_2R_2 door r′ gaat. Deze oplossing loopt volkomen parallel met de stereometrische.

Een tweede bewerking bestaat daarin, dat men twee lijnen van het vlak bepaalt, waarop de zijden van de vierhoek gelegen zijn: het zijn *l* en *m;* opzettelijk heb ik dezelfde stand der gegevens genomen als in fig. 6 en 7.

Men vindt onmiddellijk de tweede projecties van *l* en *m* en door ophalen de verticale projecties der hoekpunten.

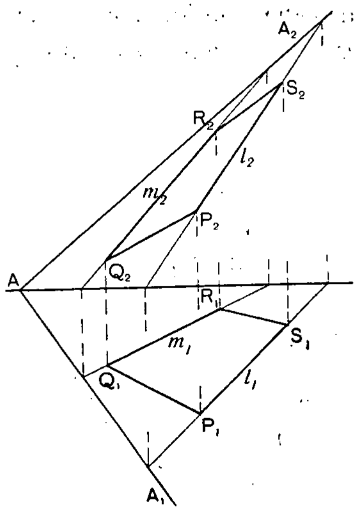


Fig. 8. Twee lijnen *l* en *m*.

De proef bestaat dan b.v. daarin, dat de snijpunten der diagonalen van beide projecties in één ophaallijn liggen.

Deze oplossing is toch al heel eenvoudig; veel minder lijnen, geen bogen, veel nauwkeuriger, veel duidelijker dan die van fig. 6, terwijl zij voeling houdt met de stereometrie; men moet moeite doen, om hierin niet een afgeknot prisma te zien.

We komen nu tot de derde oplossing met de affiniteitsas van het vlak A. Alle lijnen gelegen in het vlak A snijden de snijlijn van A met elk ander vlak (dat het andere evenwijdig is met A sluiten we uit, maar van evenwijdige lijnen zeggen we, om uitzonderingen uit te sluiten, dat ze elkaar snijden; in de vijfde klas is daar niets tegen). We nemen nu voor dat andere vlak het deelvlak M van de tweede en vierde ruimtehoek, omdat de snijpunten van lijnen met dat vlak al bijzonder eenvoudig zijn te construeeren; ze zijn nl. de snijpunten der beide projecties, zooals gezegd is op blz. 119 en hier nog eens herhaald wordt. Zie nu fig. 9.

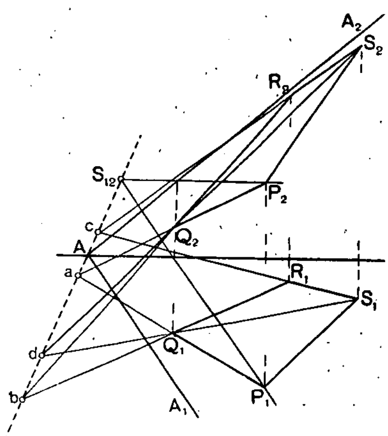


Fig 9. Met de affiniteitsas s_{12}.

Met de eerste hoofdlijn *h* door P_1 wordt P_2 bepaald en ook S_{12}; hiermee is s_{12} bekend. De zijden P_1Q_1, Q_1R_1 en R_1S_1 en de diagonaal S_1Q_1 snijden s_{12} opv. in a, b, c en d. Trek aP_2; door ophalen vindt men Q_2; bQ_2 geeft R_2; cR_2 en dQ_2 geven S_2, de proef bestaat hierin, dat $S_1S_2 \perp$ OX staat.

Als vierde constructie, een die al heel simpel is, zal men gewoon de eerste hoofdlijnen van de hoekpunten trekken en de ophaallijnen; met een paar teekendriehoeken loopt alles weer zonder passer glad af; zie fig. 10.

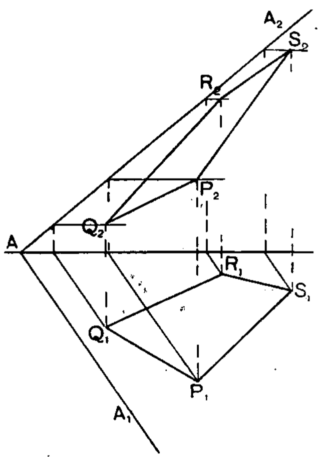


Fig. 10. Met de eerste hoofdlijnen.

Een volstrekt minderwaardige manier, de slechtst denkbare is die van fig. 6; nadat men immers (als men dan toch de standhoek wil gebruiken) de loodlijn P_1P_3 heeft getrokken, dan ligt het toch voor de hand om de hoogte van P boven het horizontale vlak (van P_3 tot DD_1) over te nemen en op de ophaallijn van P_1 boven de as uit te zetten; waarom men voor dat doel een grooten omweg moet maken; is mij een raadsel en voor leerlingen is deze omweg bij eenigszins andere ligging een puzzle; vergelijk maar eens fig. 12, die op de manier van fig. 6 is geconstrueerd en wel heel duidelijk laat zien, hoe het niet moet.

Het groote voordeel van de vier constructies van fig. 7, 8, 9 en 10 bestaat ook nog hierin, dat men enkel met de liniaal en teekendriehoek werkt en dus dat ze zeer nauwkeurig zijn en dat men ze *ziet*. Bovendien, en dit is 't allervoornaamste; ze wortelen geheel in de stereometrie en dit vak en de Beschrijvende Meetkunde steunen elkaar.

Bij de oplossing van fig. 9 snijden de verlengden der zijden ook de doorgang AA_1; daar die ook zulke goede diensten bewijst, zal het bij wat grootere figuren dienstig zijn op beide affiniteitsassen de snijpunten aan te teekenen om, al naar de ligging der over te brengen lijnen, de eene of de andere te nemen; de as s_{12} is in het gebruik meestal te verkiezen. Als voorbeeld daarvan *bepalen we de eerste projectie van de vijfhoek, die in het vlak U gelegen is en waarvan de tweede projectie gegeven is;* zie fig. 11. We leggen de doorgangen van het vlak in elkaars verlengde; bij de draaierij van

fig. 6, bezorgt dat den leerlingen heel wat hoofdbreken. Bij de affiniteitsassen geeft het echter geen bijzondere moeilijkheden. Teeken de eerste hoofdlijn h van een der punten, b.v. van C; op h_1 vindt men C_1; het snijpunt van h_1 en h_2 is S_{12}, en s_{12} is de affiniteitsas van het vlak U. Trek C_2B_2, C_2A_2, C_2E_2 en C_2D_2 door tot ze opv. in b, a, e en d de rechte s_{12} snijden. Trek C_1b, C_1a, C_1e en C_1d; de ophaallijnen door de tweede projecties geven de eerste projecties; de proef bestaat nu daarin, dat de projecties der zijden AB, AE en ED elkaar op s_{12} snijden. Men kan ook beginnen met het bepalen van de 1e projectie van een der zijden en dan op de manier van fig. 7 de projecties der andere zijden construeeren, gelijk men dat in de Stereometrie doet; dan zullen de ophaallijnen de proef geven.

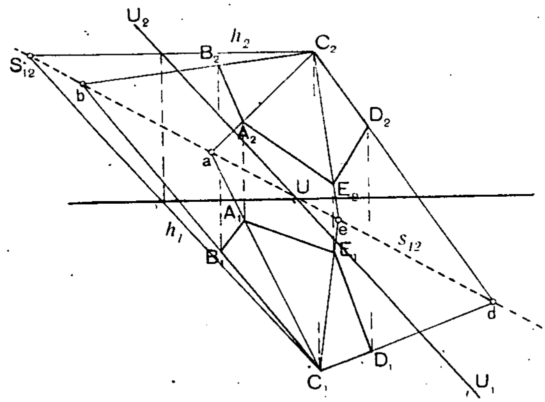


Fig. 11. Uit de 2e projectie wordt de 1e verkregen met de affiniteitsas s_{12}.

Verder kan elk der doorgangen nog gebruikt worden om zich te vergewissen, dat alles in orde is. Een tweede oplossing krijgt men door de hoofdlijnen van elk der punten te teekenen; dus op de manier als op fig. 11 alleen C_1 bepaald is.

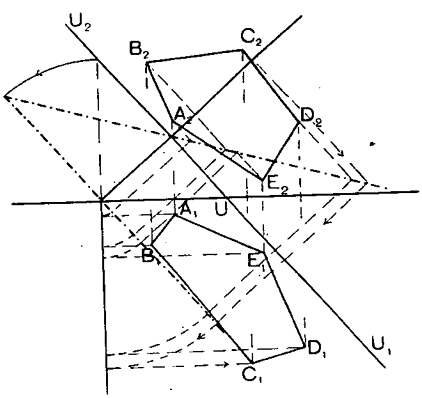


Fig. 12. De slechtst denkbare manier is conform fig. 6.

En nu als scherp contrast met alle eenvoudige oplossingen en als afschrikwekkend voorbeeld geef ik het vraagstuk nog uitgewerkt met de draaierij als op fig. 6, zonder beschrijving; deze zou heel wat langer worden dan die bij fig. 11.

Eerlijk gezegd, ik heb zelf even moeten kijken, hoe het hier met gebruikmaking van standvlak en draaierij moest gaan; eenige ver-

ontschuldiging kan ik aanvoeren uit het feit, dat ik voor het eerst zoo'n onzinnige constructie uitvoerde. Eigenlijk moest men op fig. 6 en fig. 12 door elk der punten van de veelhoek het standvlak aanbrengen op de 1ste, opv. de 2de doorgang; alle bewerkingen worden echter verschoven tot in een daarvan. — Toen ik voor een paar maanden aan een leeraar, die Beschrijvende Meetkunde in de 5e geeft, zei, dat ik er over dacht ook de affiniteitsas s_{12} op te nemen bij mogelijke herdruk van mijn boekje, toen zei hij: „ze hebben al zoo'n last met het verschuiven van al die standvlakken naar één, dat evenwijdig is met alle; dan nog affiniteitsassen; ik zou het niet doen." Ik behoefde hem niet te overtuigen van het groote nut, omdat hij er zelf even zeer van overtuigd was en hij wist ook, dat met de affiniteitsassen het andere grootendeels kan vervallen. Een andere leeraar, academisch gevormd, voortreffelijk wiskundige . . . . had er wel eens van gehoord, maar er nooit een constructie mee gezien. Ik hoop door het weinige tot op dit punt reeds beiden te hebben overtuigd van het groote nut, dat men kan trekken uit de eenvoudige eigenschappen der affiniteit.

§ 3. Onder de eindexamen-opgaven der Hoogere Burgerschool

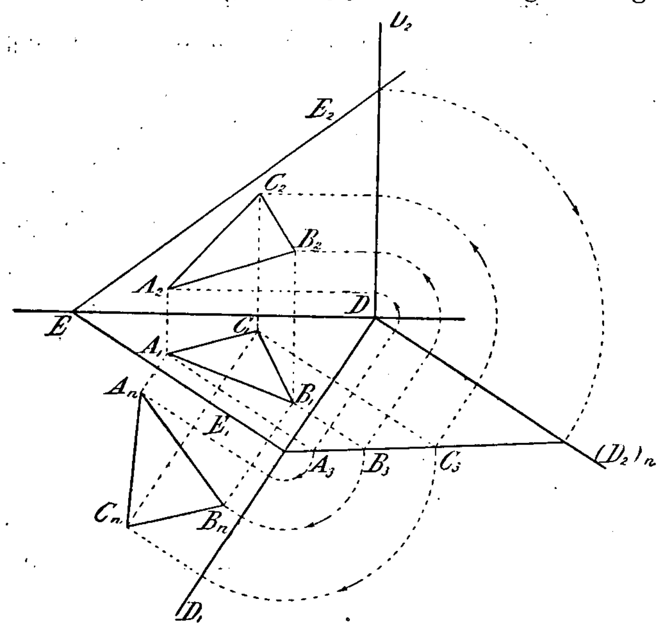


Fig. 13. Er bestaat voor hen, die zoo iets leeren, geen verband tusschen Stereometrie en Beschrijvende Meetkunde.

komen de laatste jaren mooie vraagstukken voor over wentelingen

en doorsneden, welke laatste dan in ware gedaante in het horizontale vlak moeten worden neergeslagen; ik vind de opgaven der laatste 10 jaar over het geheel genomen model-opgaven in tegenstelling met de algebra-sommen, waarvan hetzelfde zeker niet algemeen erkend wordt en terecht. Alleen vrees ik, dat bij de uitwerking door de meesten niet de beste middelen worden gebruikt, gezien al weer, hoe de leerstof, die op het eindexamen wordt opgegeven, in eenige schoolboeken wordt opgedischt, nl. met volkomen terzijdelating van alles, wat de Stereometrie leert, die, zij 't dan ook, dat zij het woord affiniteit niet noemt, nochtans de zaak zeer zeker behandelt. Zoo vind ik nevenstaande figuur 13; volmaakt dezelfde in andere boeken; een is genoeg.

Waar is ook maar het geringste spoor van eenig besef, dat op de horizontale doorgang de snijpunten liggen van de overeenkomstige lijnen van eerste projectie en neergeslagen figuur? Over de vreemde omweg om de tweede projectie uit de eerste af te leiden heb ik reeds het mijne gezegd; ik bepaal mij nu tot het omslaan.

Het vraagstuk luidt:

In een gegeven vlak E ligt een driehoek ABC, waarvan de horizontale projectie $A_1B_1C_1$ eveneens gegeven is. Gevraagd de verticale projectie van △ ABC en de driehoek zelf (in ware grootte) te construeeren.

En nu geef ik voor het omslaan deze oplossing.

Trek de eerste hoofdlijn door C; deze snijdt EE_2 in p; bij het neerslaan van het vlak beweegt p zich in het vlak, dat in M loodrecht staat op EE_1 en op het horizontale vlak; $Ep = Ep_n$; h wordt neergeslagen h_n en C komt in C_n; trek C_1A_1 en C_1B_1 door tot ze EE_1 opv. in a en b snijden; trek C_na en C_nb; de lijnen door A_1 en B_1 evenwijdig aan C_1C_n geven A_n en B_n; nu snijden B_1A_1 en B_nA_n elkaar op EE_1, gelijk behoort. Nu kan men mijnentwege nalaten EE_1 affiniteitsas te noemen, als men de zaak maar op deze wijze in algeheele overeenstemming met de Stereometrie behandelt.

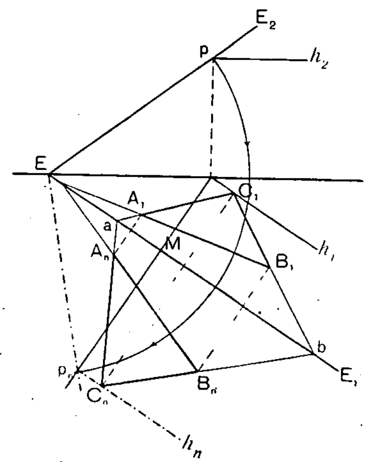


Fig. 14. Hetzelfde als in fig. 13, maar met de affiniteitsas EE_1.

Men zal tegen kunnen werpen, dat fig. 13 toch ook wel duidelijk is; niet te ontkennen, als alles zoo voordeelig mogelijk gegeven is; maar ik geef het Uw vijfde klas te doen om fig. 12 van blz. 125 eerst aldus te maken en dan nog eens om te wentelen; tien tegen een, dat

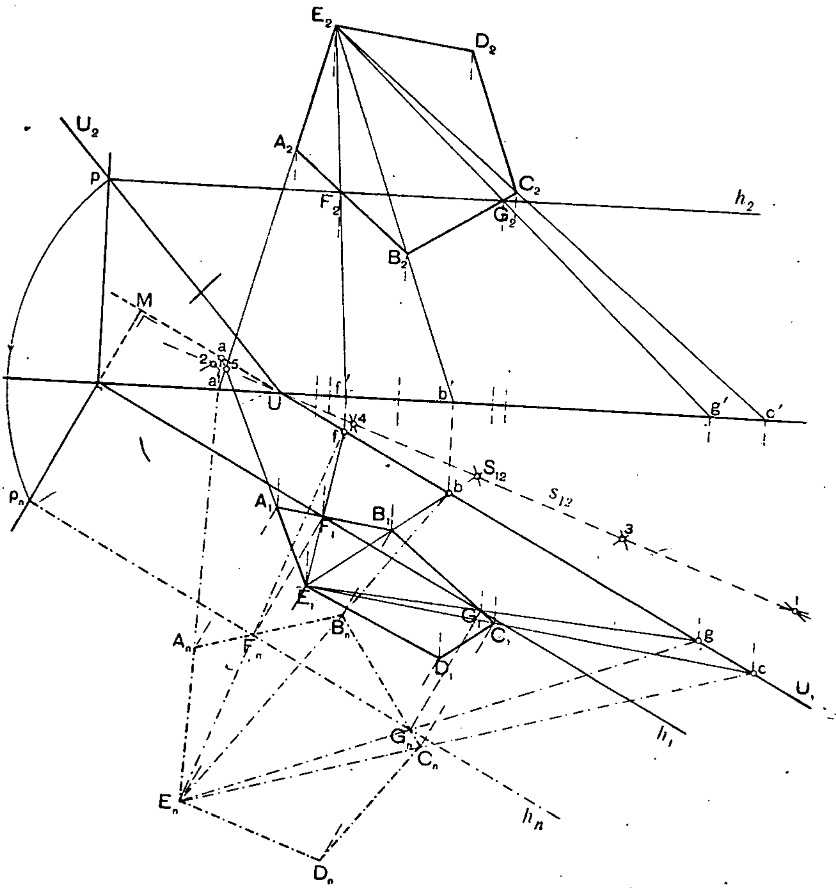


Fig. 15. Uit de neergeslagen figuur, die moet liggen in het vlak U, worden 1e en 2e pr. bepaald met de affiniteitsas UU_1; S_{12} dient voor de proef.

ze er in verdoold raken. Met behulp van de affiniteitsassen loopt alles heel eenvoudig, zie slechts fig. 15; ik neem nu niet de doorgangen in elkaars verlengde, maar wel in een stand, die de leerlingen liefst niet nemen.

Daar in de meeste gevallen de opgave luidt, van een gegeven vlakke figuur de beide projecties te bepalen in een gegeven vlak, zal ik dit als voorbeeld geheel uitwerken; dit is de bewerking, die zoowel met de affiniteitsassen als met al die cirkelboogjes en het

standvlak, dezelfde handgrepen vereischt, alleen in omgekeerde volgorde.

Ik stel mij dus voor om de opgave uit te werken:

In het vlak U een regelmatige vijfhoek te leggen; omschrijving der

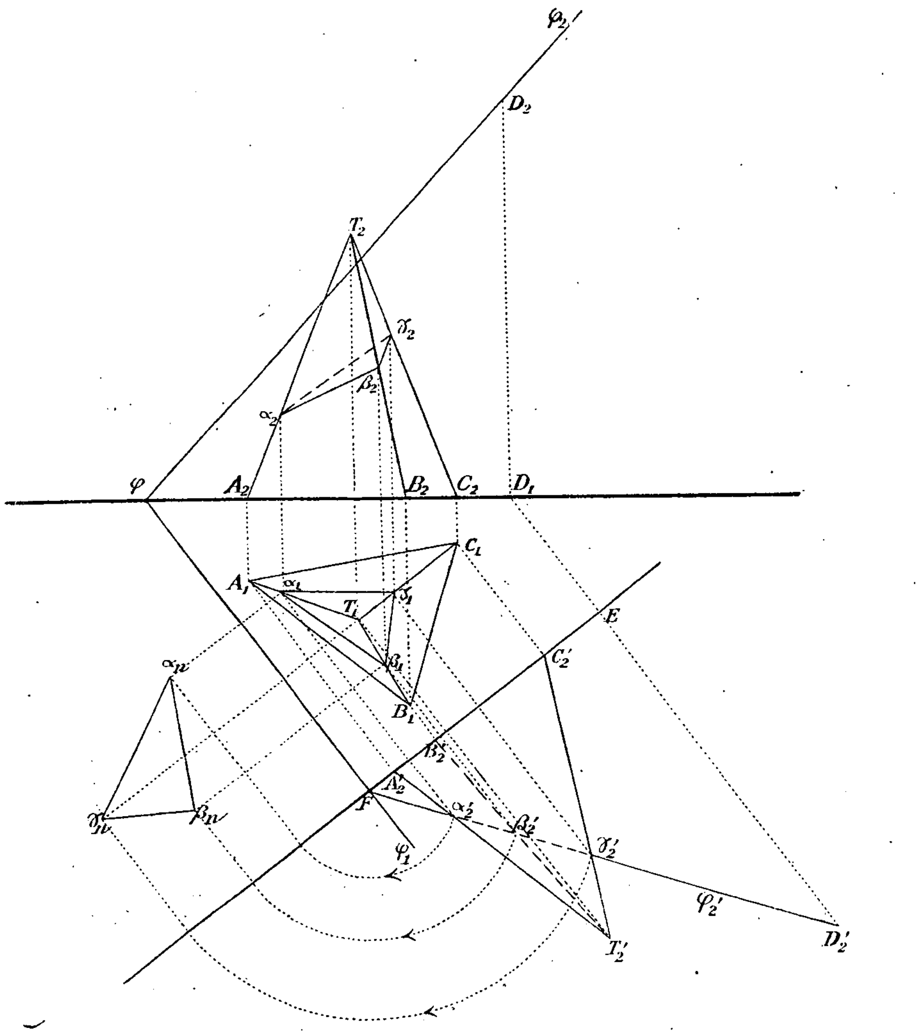


Fig. 16. Nog een voorbeeld van een volstrekt minderwaardige constructie.

gegevens(fig.15) laat ik hier maar weg; voor een schoolopgave is dat natuurlijk wel noodig. Gegeven zijn de vijfhoek $A_nB_nC_nD_nE_n$ en het vlak U; trek een eerste hoofdlijn h; Up wordt omcirkeld tot zij de loodlijn in M op UU_1 snijdt in p_n; trek h_n // h_1; nu werken we verder met de doorgang UU_1. Verbind E_n met A_n, met F_n,

B_n, G_n en C_n; deze bepalen op UU_1 de punten a, f, b, g en c; F_1 en G_1 liggen op h_1, zoodat die onmiddellijk zijn te construeeren, evenals F_2 en G_2 op h_2; fF_1 en gG_1 geven E_1 op de rechte uit E_n loodrecht op UU_1 getrokken. Verder ziet de lezer wel, hoe de rest gegaan is, ook in tweede projectie; hierbij is geen gebruik gemaakt van s_{12}; deze is alleen voor de proef geteekend; E_1B_1 en E_2B_2 geven S_{12} en US_{12} is de affiniteitsas van het vlak; de lezer ziet de punten 1, 2, 3, 4 en 5 op s_{12}. Bij deze constructie moet alles sluiten als een bus; men komt voortdurend op incidentie van lijnen en punten; wel eens rijkelijk veel contrôle, benauwend veel . . . .; de lezer doe het zelf maar eens; oneindig veel beter dan een figuur als 13, waar elke zweem van proef ontbreekt.

Ook hier heb ik evenals in fig. 12 opzettelijk een figuur als voorbeeld genomen, die op andere wijze heel lastig wordt. De opgave in fig. 15 uitgewerkt wordt dikwijls uitgebreid tot de constructie van de doorsnede van een pyramide met een plat vlak; natuurlijk is de behandeling daarvan al even dun in de schoolboeken; daarover zeg ik niets, om niet in herhaling te vallen, maar dat men zoozeer elke uitwisseling met de Stereometrie zou vermijden als fig. 16 ons vertoont, is toch zeker ontstellend; in andere boeken treft men volmaakt dezelfde „constructies" aan.

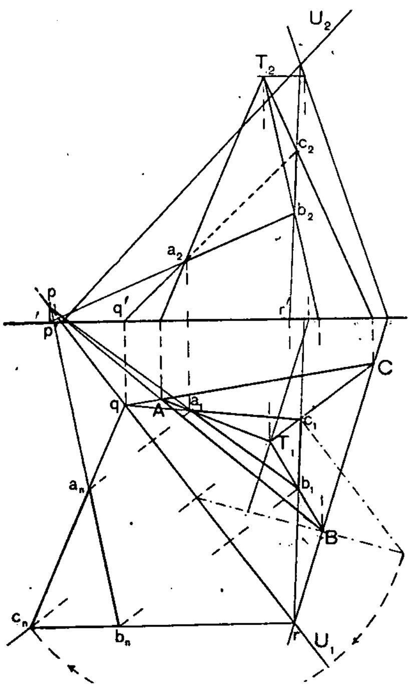


Fig. 17. Wat de Stereometrie leert, dat teekenen we.

Ik zal de opgave: *de doorsnede te bepalen van de pyramide TABC met een willekeurig plat vlak en de werkelijke gedaante van de doorsnede te construeeren,* nu oplossen met gebruikmaking van de affiniteit. TABC is het viervlak en U het gegeven vlak; bepaal de doorgangen van het vlak TBC (zie de hoofdlijn door T); bepaal de snijlijn van dit vlak TBC en het vlak U; men heeft nu bc; trek BA door tot p; b_1a_1 gaat er ook door; trek b_2p' en als proef nog c_2a_2, die door q' gaat.

Principe : door snijlijn [illegible]

Nu moeten we één punt van de doorsnede neerslaan door wenteling om UU_1 om verder de eigenschappen der affiniteit te kunnen toepassen. We nemen c; zie c_n; verder trekken we c_nq, c_nr, dan a_1a_n en b_1b_n evenwijdig aan c_1c_n; b_na_n gaat, gelijk behoort, door p.

§ 4. Hiermee zullen we onze bespreking van de affiniteit voor het hoogere burgerschoolonderwijs beëindigen; ik hoop, dat eenige

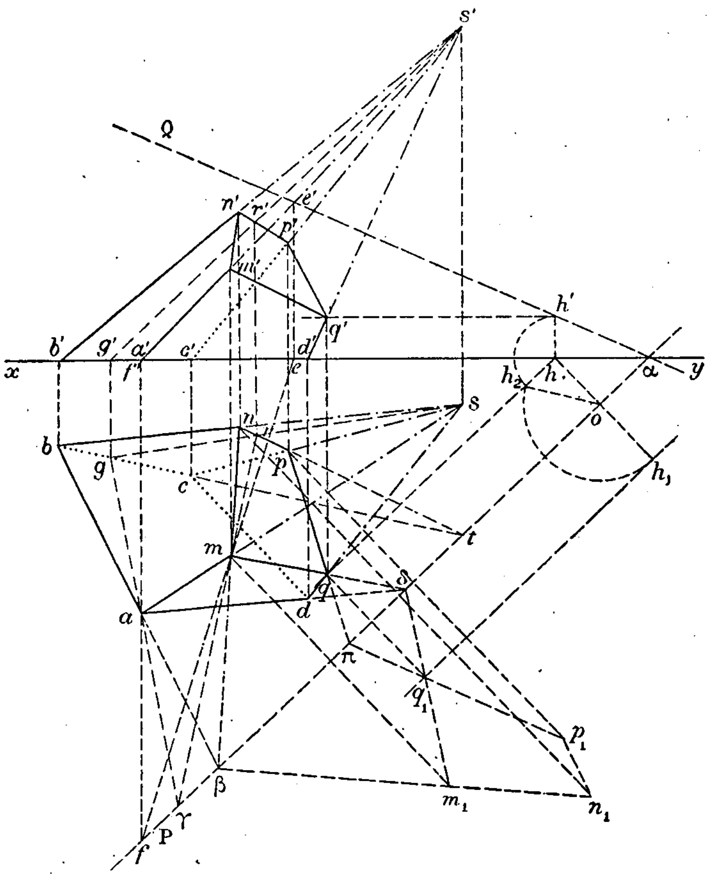


Fig. 18. De Franschen gebruikten in de vorige eeuw de doorgang al als affiniteitsas.

leeraren overtuigd zullen zijn van de wenschelijkheid om de Beschrijvende Meetkunde vast te maken aan de Stereometrie in plaats van alles wat zij leert, te negeeren; beide vakken kunnen er niet anders dan wel bij varen. Bij het zien van de figuren in vele boeken

schijnt het mij toe, dat de Beschrijvende Meetkunde vooral daar, waar zij aantrekkelijk en leesbaar wordt, niet veel anders is dan een opvolgende reeks werktuiglijke handgrepen; bij gunstige ligging wil dat nog wel; de figuren, die voorgeteekend staan in de boeken, zijn alle zoo gemakkelijk mogelijk geplaatst. Hij, die echter doordrongen is van het belang van de affiniteitsassen voor het begrip van zijn bewerkingen en voor het zien in de ruimte, die kan met geen mogelijkheid meer figuren als 6, 13 en 16 met zijn klasse behandelen, al zien ze er ook nog zoo simpel uit; onweerstaanbaar wordt hij gedrongen tot het gebruik dier assen. — *Het begrip beter, de theorie duidelijker, inniger samenhang met de Stereometrie, beter zicht op de figuur, minder lijnen, nauwkeuriger teekeningen, ...* samen zullen ze bij velen niet bij machte blijken om sleur te overwinnen; als maar een van de vijf lezers de affiniteitsassen gaat gebruiken, dan is mijn moeite al dubbel en dwars beloond.

„Nieuw" is de zaak geenszins, dat staat al op blz. 116 te lezen; en anderen hebben al lang de affiniteitsassen gebruikt. Nu ben ik niet in staat om na te gaan, hoe men het tegenwoordig in andere landen doet; om de eenvoudige reden, dat ik geen boeken over dit vak heb. Een paar collega's hebben mij de Nederlandsche geleend op mijn verzoek, Dr. De Vaere een oud Fransch schoolboek door Chollet et Mineur van 1905; fig. 18 is daaruit overgenomen; bij de behandeling van het prisma iets dergelijks.

In hetzelfde boekje worden eenige bladzijden besteed aan: Points et droits des plans bisecteurs, Droites et plans parallèles aux et perpendiculaires aux plans bisecteurs.

Intersections des plans. Zij behandelen de stof, die men noodig heeft om het belang in te zien en het gebruik te toonen van de affiniteitsas van het vlak; de uitgave van 1905 is een 4e druk, conformément au programme du 27 Juillet 1905. Zoo geeft b.v. fig. 19 de oplossing van:

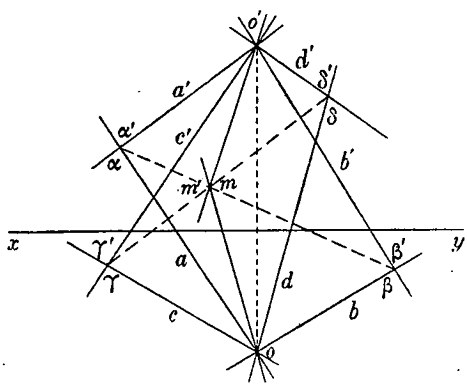


Fig. 19. Een andere figuur uit het Fransche boek.

Déterminer l'intersection de deux plans définis chacun par deux droites concourant au même point. Op de figuur bepalen *a* en *b* een vlak, *c* en *d* een ander. Men bepaalt nu eenvoudig de snijlijn van deze beide vlakken met het deelvlak van de tweede ruimtehoek; men verlengt dus de 1e en 2e projectie, tot ze elkaar snijden, zie $\alpha\beta$ in het vlak van *a* en *b*, $\gamma\delta$ in dat van *c* en *d*; deze snijden elkaar in *m*; de snijlijn is nu *mo*. — Dit is een heel mooie toepassing en een

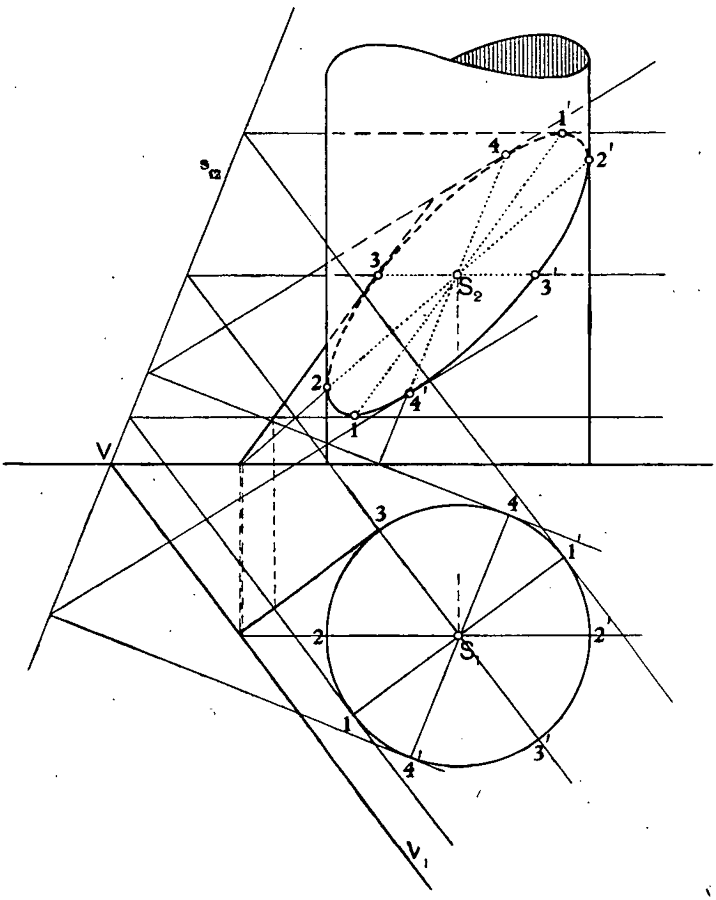


Fig. 20. Een figuur uit De Vries-Wijdenes Beschrijvende Meetkunde II.

nuttige ook. Dit vraagstuk komt nl. voor bij de constructie van de raaklijn in een punt P van een ruimtekromme. Stel, dat P een punt is van de doorsnede van een kegel en een torus; het raakvlak in P aan de torus is bepaald door de raaklijnen aan meridiaan- en parallelkromme door P en het raakvlak aan de kegel door de

beschrijvende rechte van P en de raaklijn aan een kromme door P (b.v. een cirkel); elk der raakvlakken is dus bepaald door twee rechten door P; de raaklijn zelf vindt men op de in fig. 19 aangegeven manier. — Een leerling, die naar Delft gaat en het laatste op het college krijgt, heeft van de „draaierij" niets dan last, van de affiniteit niets dan pleizier; zie ook slechts, hoe simpel de doorsnede wordt verkregen van een kegel met een plat vlak en (dat is het voornaamste) met alle belangrijke punten. Wie al op school vertrouwd geraakt is met de as s_{12}, die zal zeker dadelijk deze figuur kunnen begrijpen.

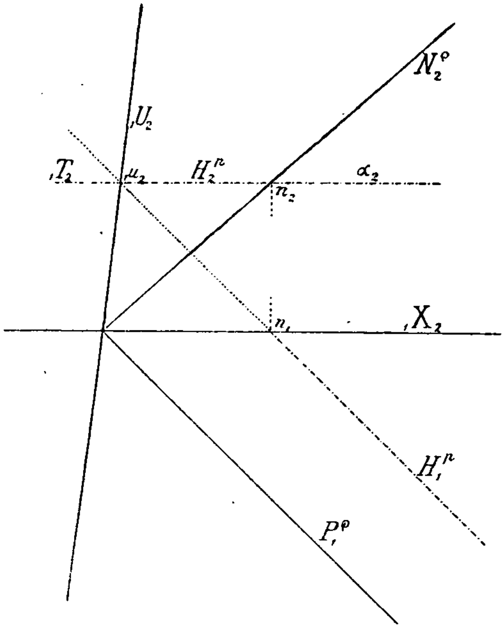


Fig. 21. Figuur uit een Czechisch schoolboek van 1906.

En dan heb ik nog één boekje met de titel Deskriptioní geometrie pro vyšši třidy reálnich skol; dat is zoowat het eenige, dat ik bijna kan lezen; Prof. Vetter in Praag zond het mij verleden jaar; gedrukt in 1906, in het Czechisch; figuren zijn gelukkig wereldtaal en dan zie ik reeds op blz. 33 de snijlijn geconstrueerd van een vlak met het tweede deelvlak. Verder vind ik nog eenige figuren met de as s_{12} en op blz. 53 fig. 22, waarop duidelijk het gebruik van beide affiniteitsassen te lezen is; men ziet ze ook verder bij de doorsneden en omgewentelde doorsneden.

Is het niet zonderling; ik heb slechts twee buitenlandsche schoolboeken, 25 jaar en meer oud en in beide komt de affiniteit tot haar recht; ik heb zeven Nederlandsche, thans in gebruik zijnde, schoolboeken bij de hand en in geen van de zeven is ook maar een spoor te bekennen van eenig besef van het bestaan van deze kostelijke geestelijke materie, die bovendien zulke uitnemende diensten bewijst bij het technische werk. Het achtste en dat noem ik bij name, nl.

J. Versluys Beschrijvende Meetkunde, Eerste deel, behandelt beide affiniteitsassen; opzettelijk geef ik overdrukken van de figuren uit de negende druk van 1918 zie nrs 23—28 en niet uit de tiende, die door mij van nieuwe figuren is voorzien. Dit boek van Versluys wordt op de H.B.S. weinig meer gebruikt en ook hier ziet men weer, dat de

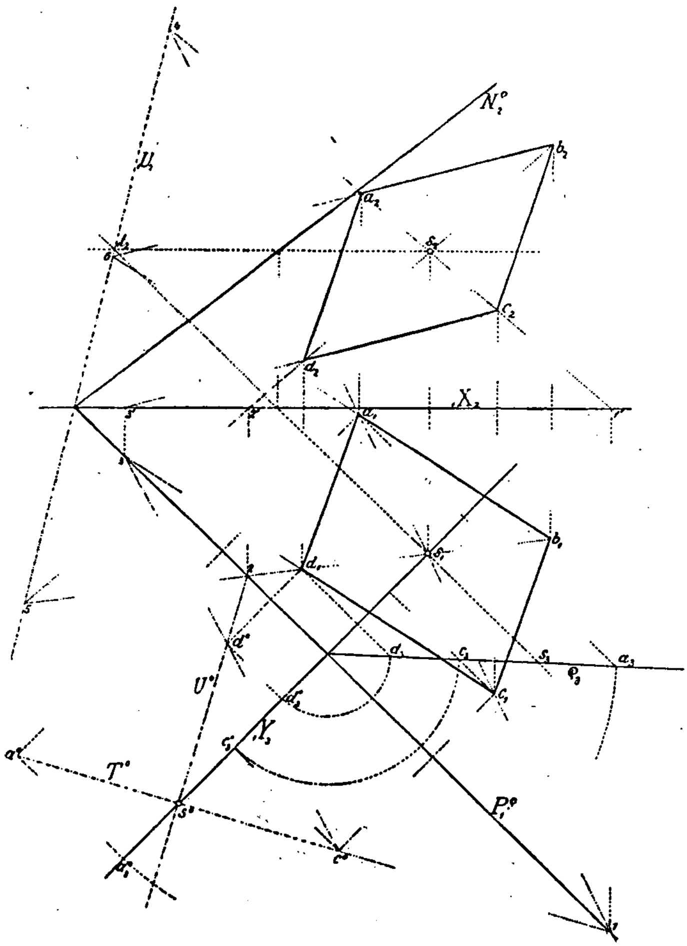
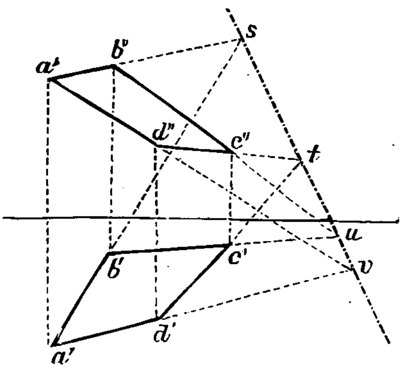


Fig. 22. Nog een figuur uit het Czechische boek.

vooruitgang langs een zigzaglijn gaat. Andere schrijvers, die van de affiniteit in het geheel geen gebruik maakten, waarschijnlijk het bestaan niet kenden, hebben het uitstekende werkje van Versluys verdrongen, zeker niet ten voordeele van het vak.

Natuurlijk zullen er scholen zijn, waar de leeraar zich in het geheel niet stoort aan het boek en waar de affiniteit volle recht



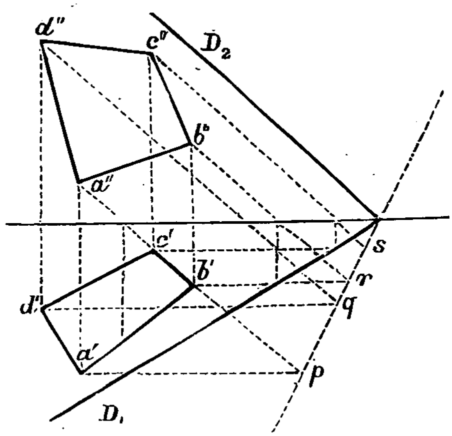


Fig. 23. Fig. 24.
Beide uit Versluys Beschrijvende Meetkunde I.

wordt gedaan, zooals dat vroeger, getuige de tien drukken van Versluys' boekje, zeker gebeurde. Ik acht me gelukkig tenminste den lezers een afdruk te kunnen geven van een kiekje in het schooljaar 1902—1903 gemaakt door een der jongens van de klas van den

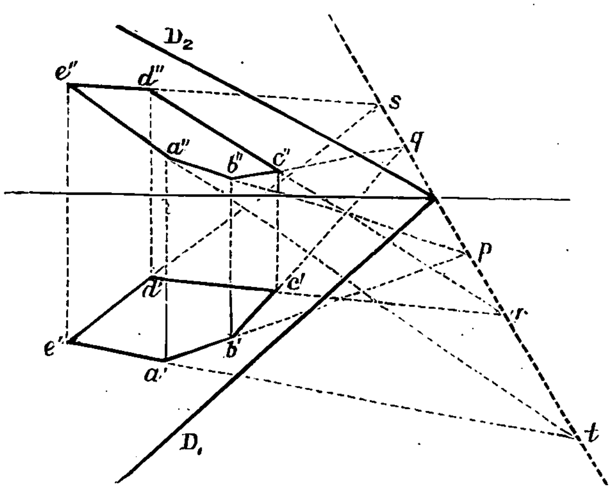


Fig. 25. Uit Versluys Beschrijvende Meetkunde.

leeraar Hk. De Vries, aan de 1e H.B.S. met vijfjarige cursus te Amsterdam; ieder herkent hem meen ik. Een andere leerling van

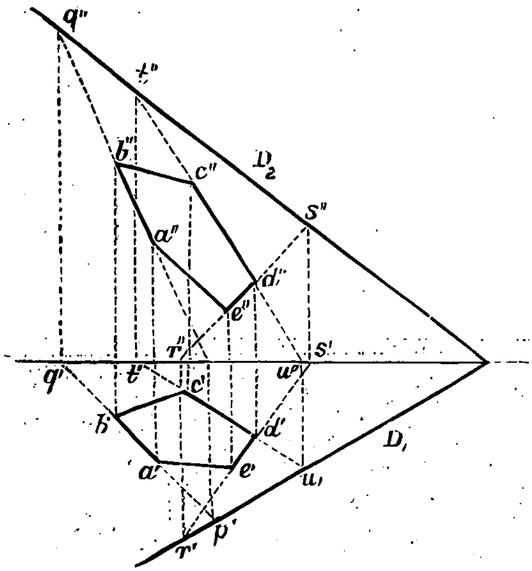


Fig. 26. Uit Versluys Beschrijvende Meetkunde I.

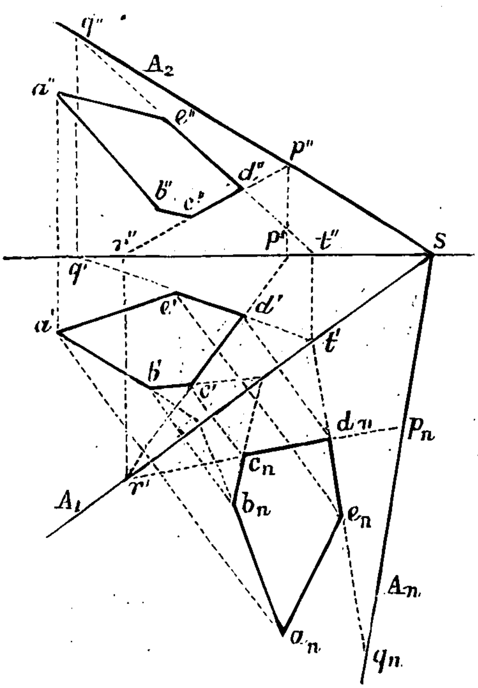


Fig. 27.

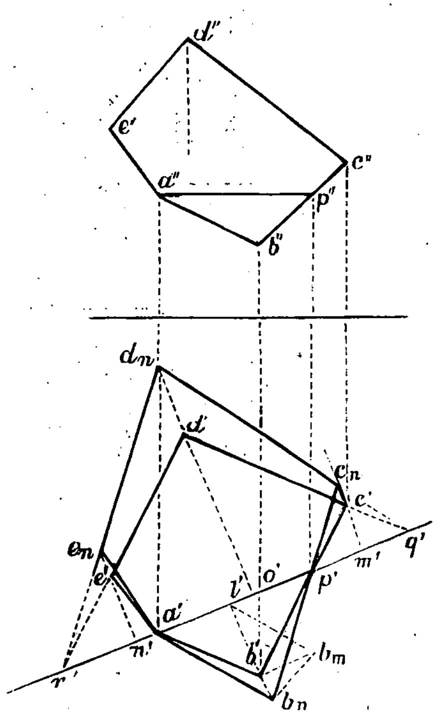
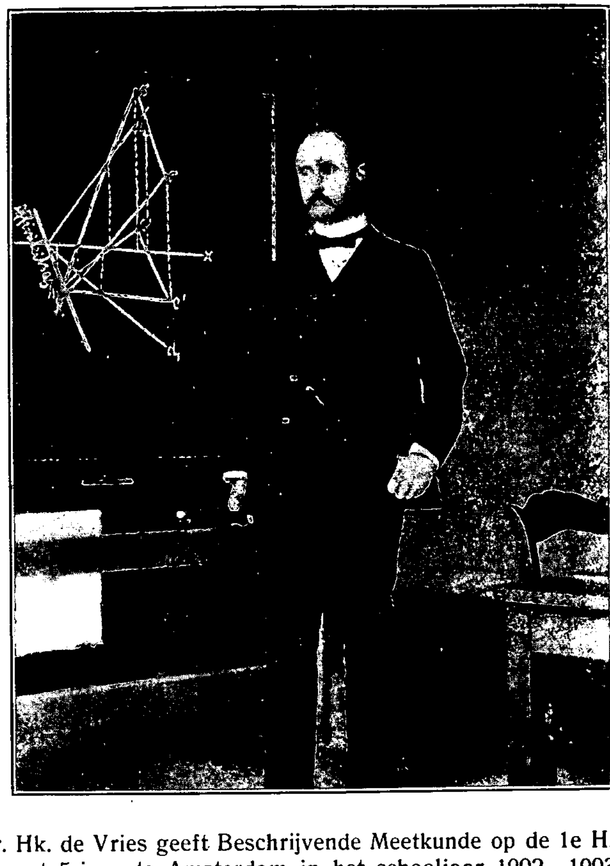


Fig. 28.

Beide uit Versluys Beschrijvende Meetkunde I.

die klas liet mij een jaar of wat geleden deze kiek zien. Ik vroeg den afgebeelde verlof deze foto over te nemen, wat mij met de bekende welwillendheid gereedelijk werd toegestaan.

Van zulke lesgevers gaat wat uit; Prof. Korteweg gaf voor 1880 al de gelijkvormigheid, gebaseerd op de homothetische figuren; thans na 50 jaar willen velen van die „nieuwigheid" nog niets weten en de affiniteit . . . . ja, hoe zal het daarmee gaan? Ik heb er weinig vertrouwen in, dat die leerstof in de 5de klas gemeen goed wordt.



Dr. Hk. de Vries geeft Beschrijvende Meetkunde op de 1e H.B.S. met 5-j. c. te Amsterdam in het schooljaar 1902—1903.

Een beschamend voorbeeld heeft men aan de boeken van den uitstekenden paedagoog J. Versluys en aan de beide buitenlandsche boekjes, die al een geslacht voor ons gemaakt zijn.

Op blz. 249 van Jg. VI van Euclides heb ik geschreven, dat de leerstof voor het Middelbaar Onderwijs nog menige vooze plek vertoont; ik meen er weer een te hebben aangewezen. Misschien vindt mijn geachte opponens van blz. 95 in deze jaargang, dat alles in orde is.

Met zelfgenoegzaamheid komt men echter nimmer tot verbetering van het bestaande en voor eigen voldaanheid is niet de minste reden.

DE MATHEMATISCHE PAPYRUS UIT HET STAATSMUSEUM VOOR SCHOONE KUNSTEN TE MOSKOU

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

In den vorigen jaargang van dit tijdschrift mocht ik de aandacht vragen voor de toen juist verschenen eerste aflevering van de afdeeling B van het nieuwe Duitsche tijdschrift voor de geschiedenis der wiskunde *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik.* Van die afdeeling, waarin de *Studien* worden ondergebracht, is inmiddels de eerste jaargang voltooid en, wanneer de redactie erin slaagt, het tempo, waarin de nieuwe uitgave is ingezet, vol te houden en het peil, waarop zij tot dusver heeft gestaan, te handhaven, mogen we van haar initiatief nog veel heil voor de exacte beoefening van de geschiedenis van de wiskunde verwachten. Temeer, omdat zij intusschen ook den eersten stap heeft gezet op het andere, wellicht nog belangrijker terrein, dat zij zich voor haar werkzaamheid heeft uitgekozen, de publicatie van nog onuitgegeven bronnenmateriaal voor historisch onderzoek in een vorm, die zoowel de eischen van philologische en mathematische akribie als de behoeften van den gemiddelden mathematischen historicus (die zich, waar het bronnen, die in een der Oostersche talen zijn geschreven, betreft, in het algemeen met het gebruik van een moderne vertaling tevreden zal moeten stellen) zal kunnen bevredigen.

Van de afdeeling A van het nieuwe tijdschrift, de *Quellen,* is namelijk als Band I verschenen de reeds lang met spanning verwachte mathematische papyrus uit het Staatsmuseum voor Schoone Kunsten te Moskou [1]), die in de negentiger jaren van de vorige eeuw door W. Golenischeff in Aegypte werd aangekocht en waarover in 1917 van de hand van B. Turajeff een opstel verscheen, dat de nieuwsgierigheid van de mathematische Aegyptologen in de hoogste

---

[1]) *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskou herausgegeben und kommentiert von* W. W. Struve *unter Benutzung einer hieroglyphischen Transkription von* B. A. Turajeff. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abteilung A: Quellen. Band 1. Berlin (Springer) 1930. R. M. 48.80.

mate prikkelde door de volkomen onverwachte mededeeling, dat in dien papyrus de juiste formule voor den inhoud van een afgeknotte regelmatige vierzijdige pyramide werd toegepast. Die nieuwsgierigheid kan thans bevredigd worden door de studie van de zeer verzorgde uitgave, waarin W. W. Struve het geheele document (na den papyrus-Rhind het omvangrijkste, dat we van de Aegyptische wiskunde bezitten) wereldkundig heeft gemaakt. Ik wil in de volgende bladzijden het een en ander over deze nieuwe uitgave meedeelen en tevens een indruk trachten te geven van de beteekenis, die zij voor de studie van de Aegyptische wiskunde heeft.

Struve geeft eerst een uitvoerige beschrijving van de reconstructie van den papyrus uit het groote samenhangende stuk en de fragmenten, die er te Moskou van werden bewaard, van zijn palaeographie en orthographie en van de terminologie van de toegepaste mathematische bewerkingen. Daarna volgt een vertaling met philologische aanteekeningen en mathematische commentaren en een samenvatting van de door de studie van den inhoud verstrekte inlichtingen, terwijl tenslotte op 10 uitslaande bladen photographieën van den papyrus volgen met een hieroglyphische omschrijving van den (in een vermenging van hieroglyphische en cursieve teekens geschreven) inhoud. Dit deel der publicatie — voor een volbloed-Aegyptoloog natuurlijk de hoofdzaak — vermag bij den mathematicus, die leek is op het gebied van Aegyptisch schrift en Aegyptische taal, slechts bewonderende verbazing op te wekken voor een wetenschap, die erin geslaagd is een zoo allerverwarrendste en onduidelijke opeenvolging van slordige teekens te ontcijferen. Verder moet hij zich hier vol vertrouwen overgeven aan de autoriteit van de philologie, van wie hij in zijn geheele bestaan nu eenmaal afhankelijk is.

Het geheele werk vertoont het keurige uiterlijk, dat de uitgaven van Springer kenmerkt; het eenige bezwaar, dat men er tegen kan hebben, is de prijs, die zeer hoog is.

2. We laten thans een overzicht van den inhoud volgen, met inachtname van de door Struve gekozen indeeling.

Over de eerste groep, die twee zeer fragmentarische opgaven over berekeningen van onderdeelen van schepen bevat, kunnen we kort zijn; ze doet niet veel meer dan het vermoeden bevestigen, dat scheepsbouwkundige berekeningen in de Aegyptische scholen een

rol moeten hebben gespeeld en het verlangen naar meer inlichtingen wekken.

De tweede groep bevat de z.g. *pśw*-opgaven, vraagstukken van een type, dat reeds uit den papyrus-Rhind bekend was, maar niettemin van groot belang, omdat de analyse ervan de kennis van allerlei kwesties, die met het voor de Aegyptische wiskunde zoo belangrijke *pśw*-begrip samenhangen, verrijkt. Onder de *pśw* (Backverhältnis bij Struve) van een brood of een biersoort verstaat men het aantal brooden (resp. kruiken bier), dat uit een schepel graan kan worden bereid. Is dus G de beschikbare hoeveelheid graan in schepels, p de *pśw* van het vervaardigde product en A het aantal daarvan (brooden of kruiken bier), dan is

$$A = pG.$$

Als een voorbeeld van een hierop betrekking hebbend vraagstuk, dat tevens van belang is ter karakteriseering van de Aegyptische rekenmethode, vermelden we de opgave No. 24, waarin gegeven is, dat uit 15 schepels graan 200 brooden worden verkregen en 10 kruiken bier van een 10 maal zoo kleine *pśw* en waarin gevraagd wordt naar de *pśw* van het brood en die van het bier. Noemen we de *pśw* van het brood x, dan zou dit vraagstuk, in moderne symbolen geformuleerd, aanleiding geven tot de vergelijking:

$$\frac{200}{x} + \frac{10}{\frac{x}{10}} = 15.$$

Wanneer we nu de berekening in den papyrus, ontdaan van alle woorden, waardoor ze wordt begeleid, in arithmetische symbolen schrijven, dan blijkt ze als volgt te verloopen:

1) $1 : \overline{10}$ [2]) $= 10.$
2) $10 . 10 = 100.$
3) $100 + 200 = 300.$
4) $300 : 15 = 20 =$ *pśw* van het brood.
5) $20 : 10 = 2 =$ *pśw* van het bier.

Blijkbaar verloopt deze oplossing geheel parallel aan de wijze,

---

[2]) Bij de moderne transcriptie van de Aegyptische berekeningen blijkt het voordeelig te zijn, de stambreuken, waarvan de Aegyptische rekenaars zich bedienen, als volgt weer te geven: $\frac{1}{a} = \bar{a}$ (a een natuurlijk getal).

waarop wij de vergelijking zouden behandelen. Immers ook wij zouden achtereenvolgens schrijven:

$$1)\ \frac{200}{x}+10\frac{10}{x}=15.\quad 2)\ \frac{200}{x}+\frac{100}{x}=15.\quad 3)\ \frac{300}{x}=15.$$

$$4)\ x=\frac{300}{15}=20.\quad 5)\ \frac{x}{10}=2.$$

Wanneer men nu deze overeenstemming (die men ook bij de berekeningen van den papyrus-Rhind telkens weer kan opmerken) onbevangen beschouwt, dan is het moeilijk, zich erin te verplaatsen, dat nog steeds verschillende historici zich hardnekkig verzetten tegen de opvatting, dat er tusschen de wijze, waarop de Aegyptenaren en waarop wij zulk een probleem aanpakken, geenerlei essentieel verschil bestaat. Men heeft steeds weer gemeend zijn toevlucht te moeten nemen tot de onderstelling, dat er een *regula falsi* (waaronder men het bekende procédé verstaat, eerst bij wijze van proef een bepaalde waarde voor de onbekende aan te nemen, om deze dan later te veranderen in de verhouding, waarin de op grond van deze onderstelling berekende waarde van een gegeven grootheid tot haar gegeven waarde staat) werd toegepast. Men zou dan in dit geval moeten onderstellen, dat de *pśw* van het brood bij wijze van proef 1 werd gesteld, maar dat is, al kan men desnoods de gegeven berekening ook zoo interpreteeren, toch wel veel gekunstelder dan de aanname, dat er eenvoudig een vergelijking van den eersten graad wordt opgelost.

De nieuwe papyrus bevestigt dus op dit gebied de conclusies, waartoe de studie van de overeenkomstige problemen uit den papyrus-Rhind ook reeds had gevoerd.

Het geciteerde vraagstuk is een van de allereenvoudigste van deze categorie; voor de kennismaking met de meer gecompliceerde, die vaak pas te begrijpen zijn na een lang taalkundig onderzoek naar de beteekenis van de gebruikte termen, moge de belangstellende lezer naar de bron zelf worden verwezen.

3. In Opgave 21 vinden we het eerste authentieke voorbeeld van een vermengingsvraagstuk, d.i. een vraagstuk, waarin twee verschillende hoeveelheden brood, elk van bekende *pśw* gegeven zijn, terwijl gevraagd wordt naar de *pśw*, die hetzelfde totaal aantal

brooden bij hetzelfde korenverbruik zou hebben, indien deze grootheid voor alle brooden dezelfde was. Modern geformuleerd, komt dit vraagstuk neer op de berekening van x uit

$$\frac{A_1}{p_1}+\frac{A_2}{p_2}=\frac{A_1+A_2}{x}.$$

De berekening verloopt weer geheel parallel aan de wijze van oplossing van deze vergelijking in onze algebra.

4. Van een volgende categorie van problemen (die ook reeds uit den papyrus-Rhind bekend zijn) noemen we een voorbeeld:

Een arbeider moet een aantal brooden transporteeren in een 4-broodskorf inplaats van, zooals anders, in een 5-broodskorf. Gevraagd wordt het verschil in het aantal keeren, dat hij heen en weer moet gaan. De berekening verloopt als volgt: men vormt de quadraten 4^2 en 5^2, waarna door deeling blijkt, dat

$$5^2=4^2\,(1+\overline{2}+\overline{16}).$$

De gevraagde rest is $\overline{2}+\overline{16}$.

De bedoeling hiervan is blijkbaar deze: de korven waren zoo ingericht, dat elk zoowel in breedte als in hoogte het aantal brooden kon dragen, waaraan hij zijn benaming ontleende. Voor iederen keer, dat de man met den 5-broodskorf had moeten loopen, moet hij nu naast den 4-broodskorf het breukdeel $\overline{2}+\overline{16}$ van deze transporteeren. Het totaal aantal tochten met den 4-broodskorf is dus $(1+\overline{2}+\overline{16})$ maal dat met den 5-broodskorf.

5. Thans volgt een aantal van de ook reeds uit andere papyri bekende *‘ẖ‘* (hau) problemen. Veel nieuws komt hierbij niet aan het licht; ze zijn primitiever van aard dan verwante vraagstukken in andere bronnen. Hun primitiviteit doet echter den gevolgden gedachtengang zeer helder uitkomen; daardoor wordt de boven reeds verkregen indruk omtrent de overbodigheid van de aanname van een *regula falsi* nog eens duidelijk bevestigd. Van belang voor de opvatting van de *‘ẖ‘* is nog, dat dit teeken in den Moskouschen payrus niet gedetermineerd wordt met de rol, het symbool van iets abstracts, maar met het pictogram voor korrels of zand, wat een nieuw argument is voor de opvatting, dat de Aegyptenaar in zijn *‘ẖ‘* een concrete „hoop dingen" zag.

Als de reconstructie van Struve juist is, levert de nieuwe papyrus

het eerst bekende Aegyptische voorbeeld van een vraagstuk, dat, modern geformuleerd, tot een vergelijking van den vorm

$$x - ax = b \qquad (1 > a > o \quad b > o)$$

voert.

6. De thans nog volgende opgaven zijn in zooverre geometrisch van aard, dat daarin gerekend wordt met behulp van formules voor oppervlakken en inhouden, evenredigheden tusschen lijnstukken enz. Die formules worden evenals in andere papyri, zonder bewijs gebruikt; ze worden eigenlijk niet eens vermeld, maar men moet ze uit den samenhang opmaken. Of en, zoo ja, op welke wijze zij elders bewezen werden, is een vraag, voor welker beantwoording nog geen gegevens ter beschikking staan. We vermelden eerst een eenvoudig voorbeeld:

In opgave No. 6 wordt gevraagd de zijden van een rechthoek te berekenen, als de oppervlakte 12 bedraagt en de breedte $(\overline{2} + \overline{4})$ van de lengte is.

De rekenaar bepaalt eerst het quotient $1 : (\overline{2} + \overline{4}) = 1 + \overline{3}$, vindt dan $12 . (1 + \overline{3}) = 16$ en daaruit 4 voor de lengte en 3 voor de breedte.

Er is in deze berekening iets merkwaardigs (hoewel het ook reeds op andere plaatsen is opgemerkt), dat aan de aandacht van Struve ontsnapt schijnt te zijn: men zou namelijk op grond van de tradities van de Aegyptische rekenkunde verwachten, dat door rechtstreeksche deeling $12 : (\overline{2} + \overline{4}) = 16$ zou zijn gevonden. Inplaats daarvan wordt de deeling door $(\overline{2} + \overline{4})$ uitgevoerd in den vorm van een vermenigvuldiging met het omgekeerde van den deeler, wat de gebruikelijke manier van doen is in de Sumerische wiskunde.

In zijn bespreking van een volgende groep van arithmetisch-geometrische problemen gelukt het den uitgever, nu waarschijnlijk wel definitief, de jarenlang met heftigheid omstreden vraag te beslissen, of de Aegyptenaren nu eigenlijk, zooals Cantor en Eisenlohr steeds hebben volgehouden, de oppervlakte van een driehoek hebben berekend als halve product van basis en opstaande zijde (een meening, die ook nog wordt gedeeld door Peet in zijn bekende uitgave van den papyrus-Rhind van 1923) of dat ze, zooals o.a. Simon en Borchardt meenden, de juiste uitdrukking daarvoor hebben gekend.

Het meeningsverschil was ontstaan naar aanleiding van een figuur in den papyrus-Rhind, waarin men met evenveel recht een gelijkbeenigen als een rechthoekigen driehoek kan zien en waarbij het oppervlak berekend wordt als het halve product van de basis en een getal, dat naast een been geschreven staat en dat in de berekening door den terminus *mrj.t* wordt aangeduid. Cantor en zijn aanhangers beschouwden den driehoek als gelijkbeenig en de *mrj.t* als de lengte van het been; de tegenstanders hielden hem òf voor rechthoekig, waarbij de *mrj.t* tegelijk zijde en hoogte was òf voor gelijkbeenig met *mrj.t* als hoogte. Struve kan nu met behulp van den nieuwen papyrus aantoonen, dat de laatste opvatting de juiste is, waarbij hij tevens verklaart, hoe de term *mrj.t* (die eigenlijk oever beduidt en dien men daarom altijd graag als zijde heeft geinterpreteerd) aan de beteekenis, die wij door hoogte uitdrukken, kan zijn gekomen. Interessant is het daarbij verkregen inzicht in een blijkbaar consequent toegepaste teekenregel van de Aegyptische wiskunde, die hierop neerkomt, dat vlakke figuren liggend en stereometrische (die er wegens het ontbreken van projectiemethoden geheel als planimetrische uitzien) staand werden afgebeeld. De Aegyptenaar kon in verband hiermee niet spreken van de hoogte van een vlakke figuur.

7. De opgave No. 14 bevat de nu reeds befaamde berekening van den inhoud van wat wij een afgeknotte regelmatige vierzijdige pyramide noemen (het Aegyptische woord ervoor kan ongeveer worden weergegeven door „pyramide, die haar top niet heeft"). De hoogte is 6 el, de ribben van beneden- en bovenvlak resp. 4 en 2 el en de inhoud wordt gevonden als

$$\tfrac{1}{3} \cdot 6\ [4^2 + 2^2 + 2 \cdot 4]$$

Terecht klaagt Struve erover, dat de Aegyptologen, die van dit resultaat vanaf 1917 op de hoogte hadden kunnen zijn (door de publicatie van Turajeff) in het geheel niet schijnen te hebben ingezien, dat de kennis van een dergelijke formule de traditioneele voorstellingen over het peil der Aegyptische wiskunde, die steeds beschouwd is als uitsluitend gericht op practische doeleinden en uitsluitend gebaseerd op empirie, volkomen omverstoot en dat ze nog steeds in hun werken de oude opvatting als vaststaand huldigen.

8. De in No. 14 verkregen indruk, dat de Aegyptenaren een heel wat diepergaande wiskundige kennis moeten hebben bezeten, dan men vroeger gewoonlijk aannam, wordt nog versterkt in No. 10, waar uit den commentaar van Struve blijkt, dat de oppervlakte van een halven bol in den diameter d wordt uitgedrukt door de formule

$$O = \left[(2d - \frac{2}{9}d) - \frac{1}{9}(2d - \frac{2}{9}d)\right]d.$$

Als men nu bedenkt, dat de oppervlakte van een cirkel in de Aegyptische wiskunde gelijk wordt gesteld aan $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ (wat neerkomt op de aanname $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$, dus $\pi = 3,16$), dan blijkt hier het inzicht aanwezig te zijn, dat de oppervlakte van een halven bol gelijk is aan het dubbele van het oppervlak van een grooten cirkel van den bol, waardoor een beroemde stelling van Archimedes, althans wat het uitspreken betreft, 1500 jaar teruggedateerd wordt. Het is bovendien aannemelijk, dat de eigenaardige bouw van de formule wijst op een speciale beteekenis van den factor

$$(2d - \frac{2}{9}d) - \frac{1}{9}(2d - \frac{2}{9}d) = 2\left(\frac{8}{9}\right)^2 d.$$

die blijkbaar voor $\frac{\pi}{2}d$ staat, dus den halven cirkelomtrek voorstelt. De Aegyptische stelling voor het oppervlak van den halven bol zou dan dus eigenlijk als volgt luiden, dat dit oppervlak gelijk is aan het halve product van den omtrek van een grooten cirkel en de middellijn van den bol.

9. Het bovenstaande geeft wellicht eenigen indruk van den mathematischen inhoud van den Moskouschen papyrus, die deels nieuwe resultaten van groote waarde voor het historisch onderzoek blijkt te bevatten, deels nieuwe gegevens voor de meer nauwkeurige kennis van vroeger reeds bekende gebieden van de Aegyptische wiskunde. Ik heb echter geen indruk kunnen geven van het ontzagwekkende werk, dat er noodig is geweest, om dien mathematischen inhoud vast te stellen. Men bedenke steeds, welke problemen er liggen in het lezen van, in ons oog, slordig geformuleerde mathematische beschouwingen, wanneer men de beteekenis van de gebruikte termen moet weten, om den gedachtengang te kunnen volgen, maar

omgekeerd die beteekenis pas uit den gevolgden gedachtengang kan opmaken. Dit dwingt dan tot uitvoerig philologisch detailwerk, waarbij de meest uiteenloopende zaken te pas komen en waarvoor in het bijzonder een diepgaande kennis van allerlei realia noodig is. Men zou bij oppervlakkige beschouwing niet vermoeden, dat de uitgever zich sterk heeft moeten verdiepen in de Aegyptische methoden van bierbereiding, om de beteekenis van sommige *pśw*-opgaven te kunnen vaststellen.

We kunnen er ons over verheugen, dat Struve dit moeizame werk heeft verricht. De historici der wiskunde, die er hun in de laatste jaren toch reeds zoo ontzaglijk verruimden blik op de prae-helleensche wiskunden weer wijder door zien worden, zullen het ongetwijfeld met groote dankbaarheid aanvaarden.

BOEKBESPREKING.

Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales par P. Appell en E. Goursat.
Deuxième édition revue et augmentée par P. Fatou.
Paris, Gauthier-Villars, 1929.

De toevoeging „augmentée" zou niet geheel op haar plaats geweest zijn als Fatou zich beperkt had tot een nieuwe bewerking van het bekende boek over algebraische functies, daar deze tweede druk niet heel veel afwijkt van de eerste. Maar een geheel nieuw tweede deel van ruim 500 bladzijden, handelende over *automorfe functies,* heeft het licht gezien, zoodat „augmentée" een te bescheiden aankondiging is van het groote werk dat Fatou ons geschonken heeft.

Wat het eerste deel betreft kunnen wij kort zijn: het gaat over algebraische functies en de daarmee verbonden integralen. De eerste drie hoofdstukken zijn gewijd aan de tweebladige Riemannsche oppervlakken. Men kan erover redetwisten, welke gang van zaken de beste is, de hier gevolgde of die waarbij de lezer dadelijk de meest algemeene algebraische functies te zien krijgt. In ieder geval is de beschouwing van de tweebladige oppervlakken een goede voorbereiding tot die van de algemeene en tevens is zij de studie van de belangrijke klasse der hyperelliptische functies en integralen. Zoowel hier als in de verdere hoofdstukken, waar de algemeene Riemannsche oppervlakken aan de orde zijn, is de uiteenzetting zeer helder en wordt hier en daar door mooie figuren verlucht. Het Abelsche theorema en zijn meetkundige toepassingen vinden de hun toekomende plaats.

In het tweede deel, dat we moeten noemen: Fatou's leerboek der automorfe functies, wordt evenmin uitgebreide voorkennis ondersteld als in het eerste. Zelfs de lineaire functies $\frac{az + b}{cz + d}$ worden van begin af behandeld, het verband met de niet-euclidische ruimten van twee en drie afmetingen wordt in het licht gesteld, waarbij de lezer twee talen leert: die van het complexe vlak en de niet-euclidische. Zoo leert hij de groepen van lineaire transformaties in het complexe vlak ook zien als *bewegingsgroepen.* Laten alle transformaties van een groep G een cirkel C van het complexe vlak op zijn plaats, dan leert de lezer G ook vertolken als een groep van bewegingen der binnenwereld van een met C correspondeerende ellips E, welker bewoners op hun meettoestellen de Cayley'sche maten aflezen. Zulk een groep G heet onder zekere bijvoorwaarden een *Fuchsiaansche.* Dat C een natuurlijke grens is voor de elliptische modulaire functie ziet hij niet alleen functietheoretisch in, maar leert hij ook waardeeren in verband met het feit dat E de natuurlijke grens is voor haar binnenbewoners. Dat bij de behandeling van de *Fuchsiaansche* en *Kleinsche* groepen nu

eens de eene taal, dan weer de andere gesproken wordt, zonder dat ooit verwarring te vreezen is, vormt een groote bekoring.

Even zij aangestipt, wat een Fuchsiaansche groep G is:

1°. alle transformaties van G laten het binnengebied van een ellips E invariant. Het zijn *bewegingen* in bovengenoemde wereld.

2°. G heeft een door een eindig aantal zijden begrensd *fundamentaalgebied* F, dat wil zeggen dat de gebieden, waarin F wordt omgezet bij toepassing van alle bewegingen van G, juist éénmaal het binnengebied van E bedekken.

3°. Deze gebieden vertoonen nergens binnen E opeenhooping.

Een binnen C analytische functie $f(z)$ die onveranderd blijft als een transformatie van G op z wordt uitgeoefend, heet een *Fuchsiaansche functie,* waarvan het *geslacht* wordt bepaald als het Analysis Situsgeslacht van het oppervlak dat verkregen wordt door de paren homologe randen van F aan elkaar te lijmen. Hier vermoedt de lezer reeds verband met de Riemannsche oppervlakken der algebraische functies, die hij in Deel I geleerd heeft.

Op overeenkomstige manier worden de *Kleinsche* groepen en functies gedefinieerd en in het leven geroepen: de *Kleinsche* groepen bestaan uit transformaties van een boloppervlak B in zichzelf, die de afteekeningen zijn van bewegingen der binnenwereld van B voor bewoners met Cayley'sche meet-apparaten, gelijk de bewegingen in onze Cartesisch-euclidische ruimte zich in het oneindige afteekenen als bewegingen van een vlak met elliptische maatwetten.

Algemeen heet een functie *automorf* als zij niet van waarde verandert bij toepassing van iedere linaire transformatie van een groep.

Kennismaking met de voornaamste triomf van de automorfe functies wordt den lezer geenszins onthouden: de uniformiseering der algebraische functies, hetgeen zeggen wil, dat als x en y aan elkaar gebonden zijn door een vergelijking $P(x, y) = o$, waarin P een veelterm is, beide veranderlijken voorstelbaar zijn bijvoorbeeld als Fuchsiaansche functies van een veranderlijke t. Een uitvoerig hoofdstuk over conforme afbeelding, waarbij de Hilbert'sche behandeling van Riemann's minimum-beginsel de grondslag is, gaat aan het uniformiseeringsprobleem vooraf.

Hoog rijzen voor den lezer de figuren *Klein* en *Poincaré* op. En Fatou's nagedachtenis zal in eere blijven als schrijver van een meesterwerk dat zich gevoegd heeft bij zijn talrijke schoone ontdekkingen in de functietheorie, waarvan alleen reeds de randwaardenstelling van begrensde functies zijn naam onvergetelijk maakt.

Moge dit uit den aard der zaak gebrekkige bericht menigen beoefenaar der wiskunde aansporen tot bestudeering van deze fraaie werken.

Dr. J. Wolff.

G. J. Stokmans, Verzameling van opgaven voor lijnteekenen. Groningen, P. Noordhoff N.V., 1930. Gecartonneerd *f* 1.90.

De schrijver heeft in bovenvermeld werkje een aantal opgaven voor het lijnteekenen verzameld, welke alle tot onderwerp hebben meetkundige figuren. Er zijn planimetrische constructies bij, stereometrische

teekeningen (o.a. netwerken) en constructies in orthogonale parallelprojectie. Zonder uitzondering behooren de behandelde figuren tot de leerstof der hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus B, of staan ermede in verband; de in de verzameling behandelde kromme lijnen (kegelsneden, cycloiden, graphische voorstellingen der goniometrische functies) zijn voor de leerlingen dezer scholen geen onbekenden.

Ik vermoed (al ben ik in technische quaesties niet tot oordeelen bevoegd) dat de opgaven geschikt zullen zijn om de leerlingen te oefenen in de techniek van het lijnteekenen. Maar zeker zal de teekenleeraar, die zijn leerlingen deze opgaven — waarvan de wiskundige fundeering geheel binnen hun bereik ligt — laat maken, zijn wiskundige-collega een niet onbelangrijken dienst bewijzen. Het belang van het maken van nette teekeningen is te vaak betoogd, dan dat ik er hier nog over zou behoeven te spreken. En in de wiskundeles kan men aan de aesthetische verzorging der teekeningen toch nooit zooveel tijd ten koste leggen als in de teekenles.

Twaalf opgaven zijn uitgewerkt; de atlas met zeer bijzonder fraaie figuren in twee of meer kleuren zal m.i. niet nalaten de eerzucht der leerlingen te prikkelen.

Ik beveel dit keurig uitgevoerde werkje gaarne in de aandacht van de lezers van „Euclides” aan. J. H. S.

A. R. Forsyth, A Geometry of Four Dimensions.
2 vol. Cambridge, University Press 1930. 75 Sh.

In twee omvangrijke deelen in de bekende blauwe banden van de Cambridge University Press geeft A. R. Forsyth, de schrijver van een bekend standaardwerk over differentiaalvergelijkingen een uitvoerige analytische behandeling van de meetkunde in een Euclidische ruimte van vier afmetingen, waarin men zich met groote volledigheid kan laten inlichten over de mogelijkheden, die zich voordoen bij de eerste uitbreiding van het aantal dimensies boven het drietal, dat de wiskunde der ervaringsruimte kenmerkt.

Het geheele werk kan worden verdeeld in vijf afdeelingen: de eerste, hoofdzakelijk propaedeutisch van aard, behandelt, voornamelijk met behulp van parametervoorstellingen, de elementaire analytische meetkunde van de niet gebogen varieteiten, die in de te bestudeeren homaloidale R_4 kunnen voorkomen: rechte, plat vlak en lineaire R_3 (flat). Daarop volgt een differentiaal-geometrische studie van de intrinsieke eigenschappen van ruimtekrommen, aangevuld met een hoofdstuk, waarin de analoge eigenschappen in R_n worden vermeld. Vervolgens worden in de derde afdeeling de oppervlakken, d. w. z. de niet-homaloidale twee-dimensionale varieteiten behandeld, beschouwd als figuren in R_n, dus niet in relatie tot een drie-dimensionale „region”, die ze omvat. De vierde afdeeling is aan „regions” gewijd; deze worden slechts in het algemeen beschouwd; aan speciale varieteiten, zooals ze door eenvoudige algebraische vergelijkingen te bepalen zijn, wordt geen aandacht geschonken. De laatste afdeeling ten slotte bevat een studie van de theorie van de concomitanten van alle mogelijke typen, die bij de algemeene varieteiten van verschillend dimensietal behooren. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de theorie van de

continue groepen van Lie, wat aanleiding geeft tot de opstelling en integratie van een Jacobiaansch stelsel van simultane partieele differentiaal-vergelijkingen.

De grootste waarde van een aldus gedetailleerde studie van een meetkunde, waarvan de principieele mogelijkheid weliswaar gemakkelijk wordt ingezien, maar waarvan de uitwerking menigmaal tot verrassingen voert, ligt, althans voor iemand, die niet speciaal bij het onderwerp geïnteresseerd is, wel in den ruimeren kijk op tal van bekende begrippen en resultaten in R_3, die de uitbreiding van het meetkundig onderzoek op hoogere ruimten verschaft. Men leert onderscheiden tusschen gevallen, waarin die uitbreiding geheel formeel in haar werk gaat, namelijk door vervanging van 3 door 4 en in het algemeen door *n* en waarin het bedoelde begrip in R_3 dus reeds in volle principieele algemeenheid aanwezig blijkt te zijn, en andere, waarin eerst de behandeling in een grooter aantal dimensies duidelijk maakt, dat het begrip in R_3 hetzij nog embryomaal was, hetzij nog belast met een wezenlijken invloed van de waarde 3 van het aantal dimensies.

In het laatste geval, dat natuurlijk vanuit het omschreven standpunt het meest belangwekkend is, krijgt men in R_4 dadelijk een veel meer overzichtelijken en systematischen indruk dan in R_3; een voorbeeld hiervan wordt opgeleverd door de behandeling van de krommingen van een ruimtekromme. In R_3 voert men, om deze te karakteriseeren, de kromming en de torsie in, die resp. de veranderingssnelheid van raaklijn en osculatievlak bepalen. Wil men dit nu uitbreiden op R_4, dan kan men dit doen, door aan deze twee als derde kromming (bij Forsyth *tilt* genoemd) de analoge grootheid voor de osculatieruimte toe te voegen. Men kan echter ook als volgt uitbreiden, dat men naast de kromming als omgekeerde van den straal van den osculeerenden cirkel de omgekeerde waarden van de stralen van den osculeerenden bol (in de osculeerende R_3) en van de osculeerende hyperspheer (in de R_4 zelf) plaatst. Men krijgt zoo naast het drietal: kromming-torsie-tilt het andere drietal: circulaire, spherische en globulaire kromming, wat dan weer de oogen opent voor de mogelijkheid, om in R_3 voor de twee krommingen van een ruimtekromme inplaats van het paar kromming-torsie het paar omgekeerde waarden van den stralen van osculeerenden cirkel en osculeerenden bol te nemen.

Een ander belangrijk geval, waarin een uitbreiding op meer dan een wijze kan plaats hebben, is dat van den hoek van twee vlakken. De behandeling, die Forsyth hiervan geeft, wijkt sterk af van wat in de vierdimensionale meetkunde tot dusver gebruikelijk was. Men voerde namelijk voor twee vlakken, die slechts een punt gemeen hebben, steeds twee standhoeken in, omdat er twee vlakstellingen zijn, die op beide vlakken halfloodrecht staan (immers twee transversalen over de twee oneigenlijke rechten dier vlakken en hunne geconjugeerden ten opzichte van het isotrope oppervlak in de oneigenlijke R_3). Tot deze handelwijze wordt men gedwongen, als men het begrip standhoek wil uitbreiden. Geheel anders Forsyth, die aan twee vlakken steeds slechts een hoek toekent. Hij kiest daartoe in het eene vlak een parallelogram met een hoekpunt in het snijpunt met het andere vlak, projecteert het hierop en stelt nu den cosinus van den hoek gelijk

aan het quotient van het oppervlak der projectie en het oppervlak van het oorspronkelijke parallelogram. Wonderlijk is daarbij, dat hij met geen enkel woord rept van de andere, meer gebruikelijke methode en dat hij dus ook niets zegt van de eenvoudige relatie, waarin de door hem gedefinieerde hoek tot de twee standhoeken staat; en dat, terwijl hij wel de vraag behandelt naar de minimumwaarde van den hoek van een lijn in het eene vlak met een lijn in het andere.

Men krijgt in het algemeen den indruk, dat de schrijver iemand is, die graag zijn eigen wegen gaat en die er dan ook niet de minste lust heeft, methoden en resultaten van anderen in zijn betoog te verwerken. Dit geeft eenerzijds aan het boek een groote eenheid, maar het oefent ook vaak een minder gunstigen invloed uit, wanneer de den schrijver dierbare methode nu eenmaal niet de denkbaar duidelijkste of eenvoudigste is. Zoo wordt er in de analytische meetkunde, die de eerste afdeeling vult, slechts zeer zelden gesproken van oneigenlijke elementen en met geen woord gerept van het isotrope oppervlak, wat natuurlijk in metrische beschouwingen aanleiding geeft tot omslachtigheid; immers menige stelling wordt nu als het resultaat van een berekening te voorschijn gebracht, die bij projectieve opvatting van de metriek onmiddellijk evident ware geweest.

Dezelfde sterk persoonlijke trek van het boek komt ook duidelijk uit in de uitvoerige voorrede, waarin algemeene beschouwingen over de vierde dimensie worden gehouden. De schrijver spreekt zich hierin onomwonden uit tegen het relativistische spraakgebruik van een vierdimensionale werkelijkheid, die eerst ten opzichte van een waarnemer in tijd en ruimte uiteenvalt en hij wendt zich tegen de identificatie van de begrippen dimensie en variabele, die in de gearithmetiseerde analytische meetkunde gangbaar is. De vierde dimensie moet in qualiteit en mogelijkheden aequivalent zijn met de drie dimensies lengte, breedte, hoogte van de gewone ruimte en het woord dimensie wordt slechts misbruikt, als men het anders bezigt. Het is niet onwaarschijnlijk, dat in deze zienswijze ook de verklaring ligt van den afkeer van de projectieve metriek.

E. J. Dijksterhuis.

Dr. M. van Haaften, Notatie en methode in de elementaire verzekeringswiskunde. Amsterdam, N. V. Dagblad en drukkerij „de Standaard", 1930. 23 bladz. Prijs ingen. *f* 0.60.

Met het uitspreken van deze rede heeft Dr. van Haaften het ambt van buitengewoon hoogleeraar in de verzekeringswiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam aanvaard. Daar het hier den eersten leerstoel in de verzekeringswiskunde aan één onzer Universiteiten betreft, wordt hier de aandacht op deze inaugureele rede gevestigd. Aan hen, die belang stellen in de intrestrekening en de verzekeringswiskunde kan de lezing alleszins worden aanbevolen.

W. C. Post.

AFLEIDING VAN DE „PYTHAGOREIESE GETALLEN" UIT EENVOUDIGE GONIOMETRIESE FORMULES

DOOR

Dr. J. W. DEKKER.

Voor een laatste uur voor de vacantie of een onverwacht waarnemingsuur van de wiskunde-leraar in een hogere klas kan de behandeling van de vraag, welke groepen van 3 gehele getallen de zijden van een rechthoekige driehoek kunnen voorstellen, wel eens goede diensten bewijzen.

Men kan dit vraagstuk op verschillende manieren oplossen. Een oplossing die aansluit aan het behandelde in de goniometrie-les en daardoor tevens een ongezochte gelegenheid tot het repeteren van een paar goniometriese kwesties biedt, is de volgende.

We zoeken naar gehele getallen voor de zijden. Dit komt op hetzelfde neer als het zoeken van stellen meetbare waarden voor de sinus en de cosinus van één van de scherpe hoeken. Nu zijn sin α en cos α rationeel uit te drukken in *tg* $\frac{1}{2}$ α:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 {}^1/_2 \alpha} \quad \text{en} \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 {}^1/_2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 {}^1/_2 \alpha}.$$

Kiest men dus voor *tg* $\frac{1}{2}$ α een meetbaar getal, dan worden ook sin α en cos α meetbaar.

Omgekeerd hoort bij elk stel meetbare waarden van sin α en cos α ook steeds een meetbare waarde van *tg* $\frac{1}{2}$ α. Dit volgt b.v. uit de formule

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Door alle meetbare waarden van *tg* $\frac{1}{2}$ α te nemen krijgt men dus ook alle mogelike stellen meetbare waarden van sin α en cos α.

Daar bij ons probleem

$$0 < \alpha < 90°,$$

moet men zich hier echter beperken tot waarden van *tg* $\frac{1}{2}$ α tussen 0 en 1.

Stel dus

$tg\ \frac{1}{2}\ \alpha = \frac{q}{p}$ (p en q geheel en positief, onderling ondeelbaar, $p > q$).

Dan wordt

$$\sin\alpha = \frac{2pq}{p^2+q^2},\quad \cos\ \alpha = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},$$

en alle meetbare verhoudingen van de 3 zijden zijn dus voor te stellen door

$$2\ pq : (p^2 - q^2) : (p^2 + q^2).$$

ONDERLINGE LIGGING VAN TWEE CIRKELS

DOOR

P. WIJDENES.

De onderlinge ligging van twee cirkels is een van die onderwerpen uit de meetkunde, die het lastigst zijn om te onderwijzen, omdat wat er behandeld wordt, zoo klaar blijkt door aanschouwing; de intuïtie spreekt hier zoo duidelijke taal, dat de leerlingen in het geheel geen behoefte aan eenig bewijs voelen. Toch mogen we ons daardoor niet laten verleiden om het hoofdstuk over te slaan . . . . al moet ik van mij zelf bekennen, dat ik me er meestal met een Fransche slag van afmaakte op de „eerste drie" (1e H.B.S. met 3 j.c.). Het ligt ook wel wat aan de vrij stugge en omslachtige manier, waarop dit onderwerp in de leerboeken wordt behandeld, de nieuwste niet uitgezonderd; Schogt doet het natuurlijk grondig en goed; Dr. Haalmeyer laat een en ander met kleine letter drukken en zegt in het voorbericht, dat hij, evenals ik vroeger deed, ook heel wat water in de wijn doet. Ik weet wel, wiens handelwijze voor de school de voorkeur verdient.

Nu wil het mij voorkomen, dat de stof in het Meetkunde-boek van Schogt wat heel zwaarwichtig en ook noodeloos omslachtig behandeld wordt. Zonder dat ik iets er van af wist, hoe Schogt het onderwerp had behandeld (wie van de lezers van dit artikel heeft het boek doorgelezen?), was ik tot de ontdekking gekomen, als men het een ontdekking kan noemen, dat de volgende hulpstelling daarbij

zulke uitstekende diensten kan bewijzen. Schogt noemt die hulpstelling ook, maar maakt er drie stellingen van en hij buit de stelling niet genoeg uit; ook onderscheidt hij bij de behandeling van $|R - r| < MN < R + r$ drie gevallen, wat weer de zaak onnoodig verzwaart, want er is maar één geval en een onderstelling omtrent de onderlinge grootte der stralen behoeft ook niet te worden gemaakt.

Ik meen, dat het volgende niet te zwaar is en dat de weg ook niet te lang zal blijken te zijn; ik onderstel (het moge dan slechts in een enkel schoolboek aangeroerd worden), dat men te hooi en te gras op de volgende uiterst vruchtbare betrekking heeft gewezen, nl. op $AB = AP + PB$, waarbij P een punt is van het lijnstuk A B; voor een formalistische opbouw zeer gewichtig en door het gezicht op een enkel figuurtje voor leerlingen eens voor al duidelijk; ik meen, dat er niet het minste bezwaar tegen is. Dit om te laten voelen, hoe de betrekking $PA = PM + MA$ geldt, als gegeven is dat M op het lijnstuk P A ligt; ligt M op het verlengde van B P of van P B, dan is de volgorde der punten B P M (dus $BP + PM = BM$) of ze is P B M (dus $PB + BM = PM$), welke beide in de volgende behandeling een paar keer voorkomen.

H u l p s t e l l i n g. *Onder de lijnstukken, die een punt P met punten van een cirkel met middelpunt M verbinden, is het grootste het lijnstuk, dat door M gaat en het kleinste dat, waarvan een verlengde door M gaat.*

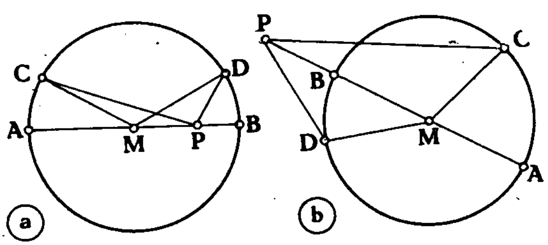


Fig. 1.

Ligt P op de cirkel, dan is dit duidelijk; het grootste is de middellijn, het kleinste is nul; valt P met M samen, dan zijn alle lijnstukken gelijk aan de straal. In fig. 1 trekken we P M A; dus is $PA = PM + MA$ (het lijnstuk P A gaat *door* het middelpunt, dus M ligt tusschen P en A); zij C een ander punt dan A van de cirkel, dan is $PC < PM + MC = PM + MA = PA$. Het andere uiteinde B der middellijn ligt zoo, dat het verlengde van B P of van P B door het middelpunt gaat; de volgorde der punten met M er bij, is dus B P M of P B M, dus $BP + PM = BM = DM <$

D P + P M; en in het tweede geval P B + B M = P M < P D + D M = P D + B M. De vergelijking van eerste en laatste lid van deze verbindingen geeft voor een punt P binnen de cirkel B P < D P en voor een punt er buiten P B < P D. De punten C en D laten we natuurlijk niet samenvallen met A of B.

Stelling 1. Als de afstand der middelpunten van twee cirkels grooter is dan de som der stralen, dan hebben de cirkels geen enkel punt gemeen en de cirkels liggen buiten elkaar.

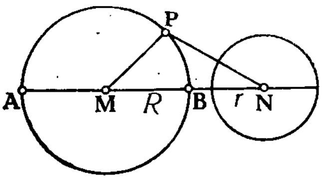


Fig. 2.

Bewijs. Noemt men M en N de middelpunten der cirkels en R en r de stralen, dan is gegeven $MN > R + r$ (fig. 2).

We bewijzen, dat elk punt van ⊙M buiten ⊙N ligt; gegeven is $MN > R + r$, dus $MN - R > r$; nu snijdt het lijnstuk MN ⊙M, omdat $MN > R$ is; het snijpunt is B; $MN - R = MB + BN - MB = BN$; dus is $BN > r$ of wel: B ligt buiten ⊙ N; omdat M op het verlengde van N B ligt, is N B volgens de hulpstelling het minimumlijnstuk van N naar een punt van ⊙ M; elk punt P van deze cirkel ligt dus verder van N dan B, dus zeker buiten ⊙ N. Op dezelfde manier blijkt, dat elk punt van ⊙ N buiten ⊙ M ligt, of nog beter door op te merken, dat het gegeven t.o. van R en r commutatief is.

Stelling 2. Is de afstand der middelpunten van twee cirkels gelijk aan de som der stralen, dan hebben de cirkels één punt gemeen; dit ligt op het lijnstuk, dat de middelpunten verbindt.

Gegeven: $MN = R + r$ (fig. 3).

Te bewijzen: De cirkels hebben één punt gemeen, gelegen op M N.

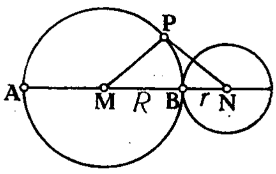


Fig. 3.

Bewijs: Uit $MN = R + r$ volgt $MN > R$, dat is: N ligt buiten ⊙ M; op het lijnstuk M N ligt dus een punt B, dat behoort tot ⊙ M;

$$\text{gegeven is} \begin{cases} MN = MB + BN = R + BN \\ MN = \dots\dots\dots = R + r \end{cases}$$

dus is $BN = r$, m.a.w. B behoort ook tot ⊙ N: maar dat is dan ook het eenige punt van ⊙ M, dat tot ⊙ N behoort, hetgeen we als volgt aantoonen. Omdat M op het verlengde van N B ligt, is N B het minimumlijnstuk van N naar een punt van ⊙ M (zie de hulp-

stelling); het punt P van $\odot$ M ligt dus verder van $\odot$ N dan B, insgelijks elk ander punt van $\odot$ M. Alle andere punten dan B van $\odot$ M liggen dus buiten $\odot$ N. Verder zij opgemerkt, dat het gegeven weer commutatief is t.o. van R en r.

Stelling 3. Als de afstand der middelpunten van twee cirkels ligt tusschen het verschil en de som der stralen, dan hebben de cirkels twee punten gemeen.

Gegeven: $|R - r| < d < R + r$.

Te bewijzen: De cirkels hebben twee punten gemeen.

Bewijs: Het lijnstuk M N stellen we voor door d; we zullen nu uit de gegevens $R - r < d < R + r$ en $r < R$ twee ongelijkheden afleiden, waarvan r het middelste lid is.

$$\left.\begin{array}{l} R - r < d \text{ geeft } R - d < r \\ d < R + r \text{ geeft } d - R < r \end{array}\right\} \text{ een der eerste leden is}$$

negatief; in elk geval geldt $|d - R| < r$. Uit het gegeven $r < R$

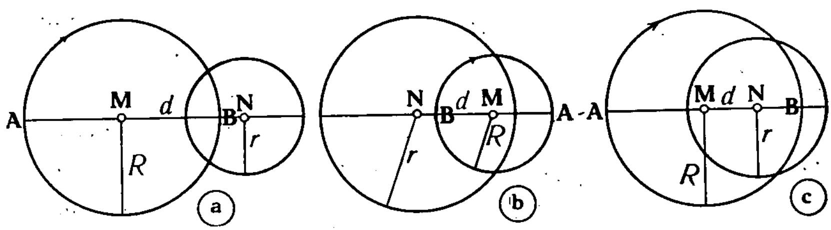


Fig. 4.

volgt $r < R + d$; samen dus $|d - R| < r < d + R$. Verwisseling van R en r in de gegevens brengt ons $|d - r| < R < d + r$. Deze beide uitkomsten zeggen ons: als voor de grootheden R, r en d geldt, dat d ligt tusschen de som en het verschil van R en r, dan gelden ook: $|d - R| < r < d + R$ en $|d - r| < R < d + r$.

Omdat de rechte N M door het middelpunt M gaat, snijdt zij $\odot$ M in twee punten, b.v. A op het verlengde van N M en B, waarbij dus $MA = MB = R$ is. A ligt op het verlengde van N M, dus $NA = NM + MA = d + R > r$, dus ligt het punt A van $\odot$ M buiten $\odot$ N; B ligt er binnen, want $NB = |NM - BM| = |d - R| < r$. Dus heeft $\odot$ M een punt A buiten en een punt B binnen $\odot$ N; doorloopt men dus $\odot$ M bij A te beginnen, dan moet men ergens $\odot$ N binnenkomen om B te bereiken en er weer uittreden om naar A terug te keeren; de cirkels hebben dus twee punten gemeen. Deze punten liggen symmetrisch t.o. van M N, omdat de cirkels zelf

symmetrisch t.o. van die rechte liggen; ze vallen niet beide op M N, omdat beide cirkels reeds twee verschillende punten (nl. op de middellijn) met M N gemeen hebben.

Opmerking. Reeds spoedig leeren we in de eerste klas, dat elke zijde van een driehoek kleiner is dan de som en grooter dan het verschil der beide andere zijden. Deze stelling leert ons nu, dat er een driehoek te construeeren is met de lijnstukken *a, b* en *c* als zijden, als van een van deze gegeven is, dat het ligt tusschen de som en het verschil der beide andere. Cirkelt men *a* en *c* om met de eindpunten van het lijnstuk *b* als middelpunten, dan krijgt men vier driehoeken.

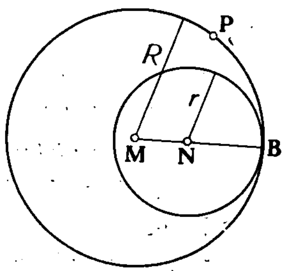


Fig. 5.

Stelling 4. Als de afstand der middelpunten M en N van twee cirkels gelijk is aan het verschil der stralen, dan hebben de cirkels één punt gemeen, dat gelegen is op het verlengde van M N, als ⊙ N de kleinste straal heeft.

Gegeven: R $>$ *r*; ⊙ M heeft R en ⊙ N heeft *r* tot straal; M N $=$ R $-$ *r*.

Te bewijzen: Het snijpunt van het verlengde van M N met de cirkels is het eenige punt, dat ze gemeen hebben.

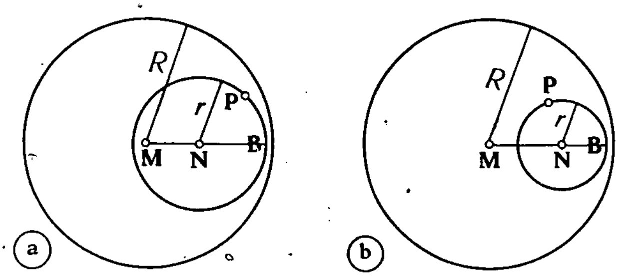


Fig. 6.

Bewijs: N is het middelpunt van de cirkel met straal *r*; men kan het lijnstuk M N verlengen tot het de kleine cirkel in B snijdt; dan is

$$\left.\begin{aligned} MB &= MN + NB \\ R &= MN + r \end{aligned}\right\} \text{ dit is gegeven; uit beide volgt, dat } MB = R$$

is m.a.w. B is ook een punt van de groote cirkel. Nu moeten we bewijzen, dat B het eenige gemeenschappelijke punt is; onder de

lijnstukken, die N verbinden met de punten van de groote cirkel, is het minimale lijnstuk dat, welks verlengde door het middelpunt van die groote cirkel gaat; dus is B N het kleinste; elk ander punt P van de groote cirkel ligt op een afstand grooter dan *r* van N af; ze liggen dus alle buiten ⊙ N.

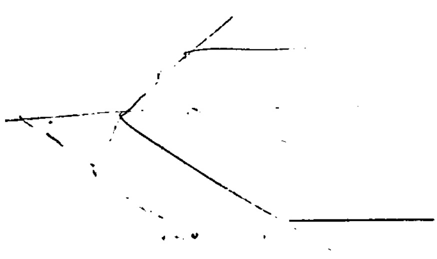
Stelling. 5. Als de afstand der middelpunten van twee cirkels kleiner is dan het verschil der stralen, dan ligt de cirkel met de kleinste straal geheel binnen die met de grootste straal.

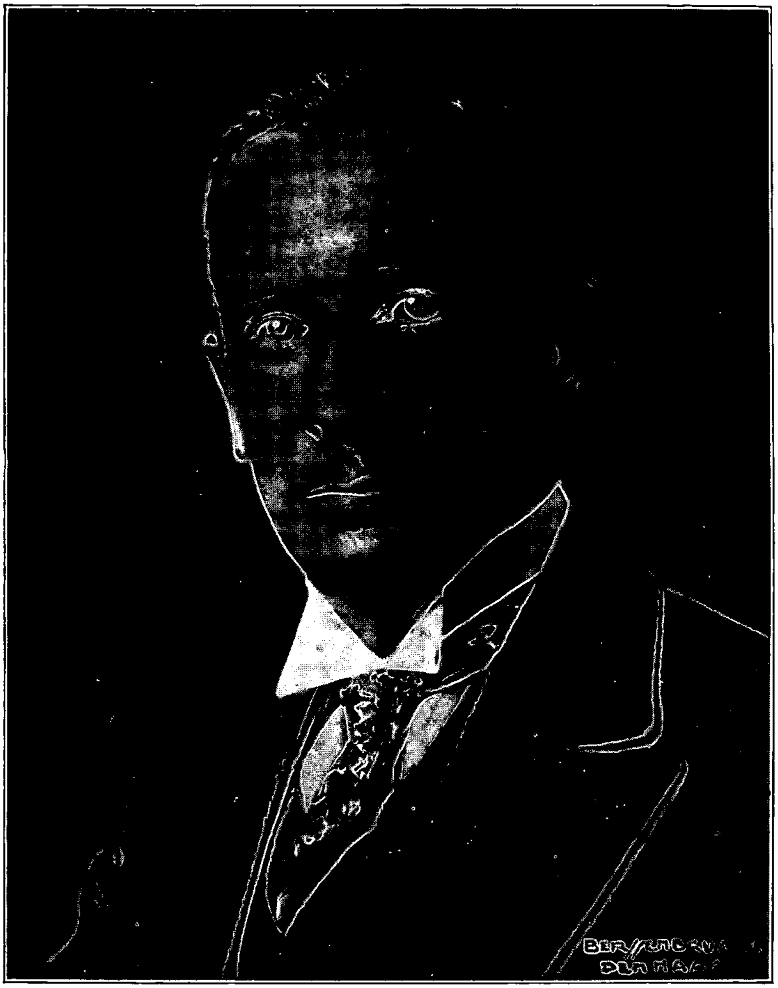
Gegeven: $R > r$; ⊙ M heeft R, ⊙ N heeft *r* tot straal; MN<R—r.

Te bewijzen: ⊙ N ligt geheel binnen ⊙ M (fig. 6).

Bewijs: Er bestaat een verlengstuk van MN, dat eindigt in het snijpunt B van de rechte MN met ⊙N; $\left.\begin{array}{l} MN + \underline{\underline{NB}} = MB \\ MN + \overline{\overline{r}} < R \end{array}\right\}$ dit is gegeven;

uit beide betrekkingen volgt M B < R; dat wil zeggen: het punt B, dat op de kleine cirkel ligt, ligt binnen de groote cirkel; het heeft verder van alle punten van die kleine cirkel de maximum-afstand tot M; volgens de hulpstelling is toch van alle lijnstukken, die M met punten van de kleine cirkel verbinden, M B het grootste; nu ligt B binnen de groote cirkel, dus alle andere punten van ⊙ N zeker.





Opname Juli 1930

Prof. Dr. J. G. VAN DER CORPUT

geb. 4 September 1890 te Rotterdam, leeraar aan de R.H.B.S. te Leeuwarden 1917—1919, G.H.B.S. te Utrecht 1919—1920, hoogleeraar aan de Universiteit te Fribourg 1922—1923, aan de Universiteit te Groningen sinds 1923.